Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, luentoviikko 6

Petri Ola

Helsingin yliopisto

25.02.2014

Menneisyyden yksikäsitteisyys

Palataan vielä lämpäyhtälön rauna–alkuarvo–ongelmaan kun $0 < t < T$,

$$u_t - k^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, 0 < t < T.$$

Oletetaan, että hetkellä $t = T$,

$$u(x, T) = 0, 0 < x < L,$$

sekä pidämme päätepisteet koko nollalämpötilassa:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \; 0 < t < T.$$

Tällöin myös alkuhetkellä $t = 0$ pätee $u(x, 0) = 0$, $0 < x < L$. Näinollen mikäli hetkellä T kaksi eri lämpötilajakaumaa yhtyvät, niin ne ovat olleet samat kaikilla aikaisemmilla ajanhetkillä olettaen että niiden reuna–arvot ovat koko ajan olleet samat.

Todistus, vaihe I

Olkoon jälleen

$$e(t) = \int_0^L u(x,t)^2 \, dx.$$

Kuten edellä nähtiin on

$$e'(t) = -2k \int_0^L u_x(x,t)^2 \, dx = 2k \int_0^L u(x,t) u_{xx}(x,t) \, dx$$

Edelleen osittainintegroimalla ja käyttämällä hyväksi sitä että u toteuttaa lämpöyhtälön

$$e''(t) = -4k \int_0^L u_x(x,t) u_{xt}(x,t) \, dx = 4k^2 \int_0^L u_{xx}(x,t)^2 \, dx.$$

Näinollen käyttämällä Cauchy–Schwarzia saamme

$$e'(t)^2 \leq e(t) e''(t), \; 0 < t < T. \tag{0.1}$$

Todistus, vaihe II

Oletetaan, että on olemassa väli $[t_1, t_2]$ siten, että $e(t_2) = 0$ ja $e(t) > 0,\ t_1 < t < t_2$. Olkoon

$$f(t) = \ln e(t),\ t_1 < t < t_2.$$

Tällöin estimaatin (0.1) nojalla

$$f''(t) > 0,\ t_1 < t < t_2,$$

eli f on konveksi, ja siis kaikilla $0 < \tau < 1$ pätee

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t_2).$$

Operoimalla tähän epäyhtälöön puolittain eksponenttifunktiolla saamme kaikilla $0 < \tau < 1$,

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t_2)^{\tau} = 0,$$

joka on ristiriita. Siis $e(t) = 0$ kaikilla t.

Aaltoyhtälön reuna–alkuarvo–ongelma

Tarkastelemme vastaavaa ongelmaa aaltoyhtälölle:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \; t > 0.$$

Asetamme alkuarvoiksi hetkellä $t = 0$,

$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \; 0 < x < L,$$

sekä pidämme päätepisteet koko ajan paikoillaan,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \; t > 0.$$

Haluamme löytää täman ongelman yksikäsitteisen ratkaisun.

Muuttujien separointi

Etsitään nyt yhtälölle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

olevia ratkaisuja. Sijoittamalla yhtälöön saamme ehdon (oletamme että $X(x),\ T(t) \neq 0$)

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

missä λ on separointivakio. Vaadimme lisäksi että $X(0) = X(L) = 0$. Tällä on epätriviaaleja ratkaisuja $u_n = X_n T_n$ vain kun

$$\lambda = \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2},\ n = 1,\ 2\ \ldots\ ,$$

jolloin kerroinvakiota vaille

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L),\ T_n(t) = A_n \cos(cn\pi t/L) + B_n \sin(cn\pi t/L).$$

Ratkaisu Fourier–sarjana

Etsimme nyt alkuperäisen reuna–alkuarvo–ongelman ratkaisua sarjana

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x/L)\{A_n \cos(cn\pi t/L) + B_n \sin(cn\pi t/L)\}.$$

Derivoimalla ja sijoittamalla formaalisti $t = 0$ saamme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L),\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{L} \sin(n\pi x/L),$$

joten

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L)\, dx,\ B_n = \frac{2}{cn} \int_0^L g(x) \sin(n\pi x/L)\, dx.$$

Tämä antaa ratkaisun $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C^1(\{t \geq 0\})$ mikäli $f \in C^4([0,L])$ ja $g \in C^3([0,L])$ toteuttavat sopivat yhteensopivuusehdot välin päätepisteissä.

Energia–estimaatti

Olkoon $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C^1(\{t \geq 0\})$ aaltoyhtälön ratkaisu. Määritellään *energia hetkellä* $t \geq 0$ kaavalla

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t(x,t))^2 + c^2(u_x(x,t))^2\,dx.$$

Nyt osittainintegroimalla

$$E'(t) = \int_0^L u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}\,dx = \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})\,dx = 0,$$

eli $E(t)$ on vakio. Erityisesti, jos $f = g = 0$ saamme että $\nabla_{(x,t)} u = 0$, eli u on vakio, joten koska se häviää hetkellä $t = 0$ on oltava $u(x,t) = 0$. Siis ratkaisumme on yksikäsitteinen.