Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, 4. luentoviikko

Petri Ola

Helsingin yliopisto

10.02.2014

Määräytyvyys- ja vaikutusalueet

Tarkastellaan D'Alembertin kaavan antamaa ratkaisua

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Huomataan, että alkuarvot pisteessä x vaikuttavat ratkaisun u arvoihin vain joukossa $E_+((x,0)) = \{(x',t);\ x - ct \le x' \le x + ct,\ t > 0\}$. Tätä kutsutaan *pisteestä* $(x,0)$ *lähteväksi eteenpäin suunnatuksi valokartioksi*.

Edelleen, huomataan, että $u(x,t)$ riippuu alkuarvoista vain välillä $[x-ct, x+ct]$.

Epähomogeeniset alkuarvo–ongelmat

Olkoon

$$E_-(x,t) = \{(x',t');\ x - c(t-t') \le x' \le x + c(t-t'),\ t' < t\}$$

pisteestä (x,t) *lähtevä taaksepäin suunnattu valokartio*. Tarkastellaan epähomogeenista alkuarvo–ongelmaa

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t),\ t > 0,$$

kun hetkellä $t = 0$ vaadimme

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Tämän yksikäsitteinen ratkaisu saadaan D'Alembertin kaavan yleistyksestä

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_{\Delta(x,t)} F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

missä $\Delta(x,t) = E_-(x,t) \cap \{t > 0\}$.

Ratkaisun stabiilisuus

Edellisen sivun ratkaisulle pätee arvio

$$\sup_{x\in\mathbb{R},0\leq t\leq T}|u(x,t)| \leq \sup_x |f(x)| + T\sup_x |g(x)| + \frac{T^2}{2}\sup_{x\in\mathbb{R},\,0\leq t\leq T}|F|.$$

Samanlaisia arvioita on mahdollista todistaa myös u:n derivaatoille, kunhan alkuarvot ovat riittävän sileitä.

Huomaamme, että aalto–yhtälön Cauchy–ongelmalle pätevät seuraavat ominaisuudet: 1) Sillä on aina ratkaisu, 2) Ratkaisu on yksikäsitteinen ja 3) Ratkaisu riippuu jatkuvasti alkuarvoista (eli stabiliteetti). Sanomme, että tämä ongelma on *hyvin asetettu*. Ongelma on *huonosti asetettu*, mikäli jokin näistä ehdoista ei toteudu. Kuten totesimme on Burgersin yhtälön alkuarvo–ongelma huonosti asetettu jos tarkastelemme sitä kaikilla positiivisilla ajanhetkillä.

Lämpöyhtälön reuna–alkuarvo–ongelma

Tarkastelemme jatkossa seuraavaa ongelmaa:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

missä $k > 0$ on vakio. Asetamme lämpötilajakaumaksi hetkellä $t = 0$,

$$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L,$$

sekä pidämme päätepisteet koko ajan vakiolämpötilassa $= 0$,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,\ t > 0.$$

Haluamme löytää täman ongelman ratkaisulle sopivan esityksen.

Muuttujien separointi

Etsitään ensin yhtälölle

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

olevia ratkaisuja. Sijoittamalla yhtälöön saamme ehdon (oletamme että $X(x),\ T(t) \neq 0)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{kX''(x)}{X(x)} = \lambda$$

missä λ on *separointivakio*. Vaadimme lisäksi että $X(0) = X(L) = 0$. Tällä on epätriviaaleja ratkaisuja $u_n = X_n T_n$ vain kun

$$\lambda = \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2 k}{L^2},\ n = 1,\ 2\ \ldots$$

Tällöin kerroinvakiota vaille

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L),\ T_n(t) = \exp(-n^2\pi^2 kt/L^2).$$

Ratkaisu Fourier–sarjana

Etsimme nyt alkuperäisen reuna–alkuarvo–ongelman ratkaisua sarjana

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) \exp(-n^2\pi^2 kt/L^2).$$

Sijoittamalla formaalisti $t = 0$ saamme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L),$$

eli A_n on funktion f Fourier-sinikerroin

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^{\pi} f(x) \sin(\pi x/L)\, dx.$$

Tämä antaa ratkaisun $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C(\{t \geq 0\})$ mikäli $f \in C^2([0, L])$ toteuttaa ehdot $f(0) = f(L) = f'(0) = f'(L) = 0$.

Yksikäsitteisyys

Teoreema. Oletetaan, että $u \in C^2(\{t > 0\}) \cap C(\{t \geq 0\})$ toteuttaa

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \; t > 0,$$

ja että alku– ja reuna–arvot häviävät:

$$u(x,0) = 0, \; 0 < x < L, \; u(0,t) = u(L,t) = 0, \; t > 0.$$

Tällöin $u = 0$.

Yksikäsitteisyyslauseen todistus

Määritellään

$$e(t) = \int_0^L u(x,t)^2\,dx,\ t > 0.$$

Tällöin käyttämällä lämpöyhtälöä saamme

$$e'(t) = 2\int_0^L u(x,t)u_t(x,t)\,dx = 2k\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx,$$

josta osittainintegroimalla saamme

$$e'(t) = -2k\int_0^L u_x(x,t)^2\,dx < 0,$$

sillä $k > 0$. Siis ei-negatiivinen funktio e on vähenevä, ja siten

$$0 \le e(t) \le e(0) = 0.$$

Siten $u(x,t) = 0$ kaikilla $0 < x < L$ ja $t > 0$.