Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, 3. luentoviikko

Petri Ola

Helsingin yliopisto

03.02.2014

1–ulotteinen aaltoyhtälö

Olkoon $c > 0$ vakio. Tarkastellaan 1–ulotteista aaltoyhtälöä

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Tässä $t, x \in \mathbb{R}$. Siirtymällä muuttujiin

$$\xi = x - ct,\ \eta = x + ct,$$

ja käyttämällä ketjusääntöä saamme aaltoyhtälön muotoon

$$u_{\eta\xi} = 0.$$

Tämän yleinen kahdesti differentioituva ratkaisu on muotoa $\Phi(\xi) + \Psi(\eta)$, missä Ψ ja Φ ovat mielivaltaisia yhden muuttujan kahdesti differentioituvia funktioita. Sijoittamalla saamme aaltoyhtälön yleiseksi ratkaisuksi

$$u(x,t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct).$$

Cauchy–ongelma

Tarkastellaan nyt alkuarvo- eli Cauchy–ongelmaa

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ t > 0,$$

kun hetkellä $t = 0$ vaadimme

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Sijoittamalla $u(x,t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$ saamme ehdot

$$f = \Psi + \Phi,\ g/c = \Psi' - \Phi'.$$

Tästä voimme ratkaista $f' + g/c = 2\Psi'$ ja $f' - g/c = 2\Phi'$, ja integroimalla saamme ns. *D'Alembertin kaavan*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Heikot ratkaisut

Lokaali–integroituva funktio u on määritelmän mukaan aaltoyhtälön

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \; t > 0$$

heikko ratkaisu, jos kaikilla $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ pätee

$$\int\int_{t>0} u(x,t)(\varphi_{tt}(x,t) - c^2 \varphi_{xx}(x,t))\, dxdt = 0.$$

Osoitimme approksimoimalla epäjatkuvaa alkudataa sileillä funktioilla että D'Almebertin kaava määrää heikon ratkaisun joukossa $\{t > 0\}$. **Huom:** Alkuehtojen voimassaolo on hieman hankalampi asia, ja tästä myöhemmin.