Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, 2. luentoviikko

Petri Ola

Helsingin yliopisto

27.01.2014

Johdatteleva esimerkki

Tarkastellaan yhtälöä $u_x = 1$. Valitaan aluksi alkuarvoiksi $u(0, y) = g(y)$. Tällä on ratkaisuna, kun valitsemme alkuarvokäyräksi $\Gamma(s) = (0, s, g(s))$,

$$x(t, s) = t,\ y(t, s) = s,\ u(t, s) = t + g(s),$$

eli eliminoimalla t ja s saamme ratkaisuksi $u(x, y) = x + g(y)$. Entäs jos alkuarvot ovat $u(x, 0) = f(x)$? Valitsemalla parametrisaatio $\widetilde{\Gamma}(s) = (s, 0, f(s))$ saamme nyt ratkaisuksi

$$x(t, s) = t + s,\ y(t, s) = 0,\ u(t, s) = t + f(s).$$

Nyt ei t:n ja s:n eliminointi onnistu!

Transversaalisuusehto I

Olkoon nyt $(x(t,s), y(t,s), u(t,s))$ alkuarvo–ongelman

$$\begin{cases} dx(t,s)/dt = a(x(t,s), y(t,s), u(t,s)), \\ dy(t,s)/dt = b(x(t,s), y(t,s), u(t,s)), \\ du(t,s)/dt = c(x(t,s), y(t,s), u(t,s)) \end{cases}$$

$$x(0,s) = x_0(s),\ y(0,s) = y_0(s),\ u(0,s) = u_0(s),$$

yksikäsitteinen ratkaisu. Tarkastellaan muuttujanvaihtoa $(t,s) \mapsto (x(t,s), y(t,s))$. Tämä on lokaali diffeomorfismi pisteen (t,s) ympäristössä jos ja vain jos Jacobin determinantti

$$J(t,s) := \begin{vmatrix} \partial_t x(t,s) & \partial_s x(t,s) \\ \partial_t y(t,s) & \partial_s y(t,s) \end{vmatrix}$$

ei häviä.

Transversaalisuusehto II

Haluamme lausua Jacobin determinantin kertoimien $a(x, y, u)$ ja $b(x, y, u)$ sekä alkuehtojen avulla. Tämä onnistuu kun valitsemme $(t, s) = (0, s)$. Tällöin suoraan yhtälöistä saamme

$$\partial_t x(0, s) = a(x(0, s), y(0, s), u(0, s)),\ \partial_t y(0, s) = b(x(0, s), y(0, s), u(0, s)).$$

Toisaalta,

$$\partial_s x(0, s) = x_0'(s),\ \partial_s y(0, s) = y_0'(s),$$

joten kuvaus $(t, s) \mapsto (x, y)$ on lokaali diffeomorfismi pisteen $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ ympäristössä jos ja vain jos pätee *transversaalisuusehto*

$$J(0, s) = \begin{vmatrix} a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & x_0'(s) \\ b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & y_0'(s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Karakteristikat

Karakteristisen käyrän projektio xy–tasoon on *karakteristika*. Jos $c(x, y, u) = 0$, niin karakteristisella käyrällä

$$u'(t, s) = 0,$$

ja näinollen u on vakio karakteristikalla. Edelleen, tällöin saamme karakteristikat suoraan yhtälöstä

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, u_0)}{a(x, y, u_0)},$$

missä $u_0 \in \mathbb{R}$ ja oletamme $a(x, y, u_0) \neq 0$.

Esimerkki I

Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$u_x + u_y = 1 - u, \quad u(x, x + x^2) = \sin(x),\ x > 0.$$

Parametrisoimalla alkuarvot käyrällä $(s, s + s^2, \sin(s))$, $s > 0$, saamme

$$\begin{vmatrix} a & x_0'(s) \\ b & y_0'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2s \end{vmatrix} = 2s > 0,$$

joten transversaalisuusehto toteutuu. Karkateriset käyrät ovat

$$x(t, s) = t + s,\ y(t, s) = t + s + s^2,\ u(t, s) = 1 + (\sin s - 1)e^{-t},$$

josta saamme eliminoimalla $s = (y - x)^{1/2}$, $t = x - (y - x)^{1/2}$ ja pätee $y > x$. Ratkaisu on siis

$$u(x, y) = 1 + \Big(\sin(y - x)^{1/2} - 1\Big) \exp\{-x + (y - x)^{1/2}\},\ y > x.$$

Esimerkki II

Tarkastellaan seuraavaksi alkuarvo–ongelmaa

$$-yu_x + xu_y = u, \quad u(x,0) = \psi(x),\, x \in \mathbb{R}.$$

Parametrisoimalla alkuarvot käyrällä $(s, 0, \psi(s))$ saamme

$$\begin{vmatrix} a & x_0'(s) \\ b & y_0'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_0(s) & 1 \\ x_0(s) & 0 \end{vmatrix} = -s.$$

Joten transversaalisuusehto pätee kun $s \neq 0$. Yhtälön derivaattojen kertoimet häviävät kun $x = y = 0$, joten origossa onkin syytä varautua ongelmiin. Karkateriset käyrät ovat

$$x(t,s) = s\cos(t),\; y(t,s) = s\sin(t),\; u(t,s) = \psi(s)e^t,$$

josta eliminoimalla saamme ratkaisuksi

$$u(x,y) = \psi(\pm(x^2+y^2)^{1/2}) \exp\{-\arctan(y/x)\}, \quad \pm x > 0$$

Burgersin yhtälö

Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$u_t + u\, u_x = 0, \quad u(x,0) = h(x),\, x \in \mathbb{R}.$$

Huomaa että riippumattomat muuttujat ovat nyt t, "aika" ja x, "paikka". Karakteristiset käyrät saadaan alkuarvo–ongelmasta

$$t(\tau, s) = 1,\, x'(\tau, s) = u,\, u'(\tau, s) = 0,$$

eli

$$t(\tau, s) = \tau,\, u(\tau, s) = h(s),\, x(\tau, s) = \tau h(s) + s.$$

Voimme kirjoittaa nämä implisiittiseen muotoon

$$u = h(x - tu).$$

Ratkaisu ei ole derivoituva kaikilla ajan hetkillä

Derivoimalla implisiittisesti muuttujan x suhteen saamme

$$u_x = h'(x - tu)(1 - tu_x)$$

josta ratkaisemalla

$$u_x(x,t) = \frac{h'(x - tu(x,t))}{1 + h'(x - tu(x,t))t} = \frac{h'(s)}{1 + h'(s)t}$$

joka lähenee itseisarvoltaan ääretöntä kun

$$t \to -1/h'(s).$$

Huomaa että mikäli alkuarvokäyrä on aidosti kasvava, ratkaisu ei ole derivoituva kaikkialla menneisyydessä. Vastaavasti, jos h on aidosti vähenevä, ratkaisu ei ole derivoituva kaikkialla tulevaisuudessa.

Leikkaavat karakteristikat

Karakteristikat saamme yhtälöstä

$$x = h(s)t + s,\ s \in \mathbb{R}.$$

Tämä on siis x–t–tason suora, joka leikkaa x–akselin pisteessä $(s, 0)$, ja jonka kulmakerroin on $-1/h(s)$. Tällä suoralla u saa vakioarvon $h(s)$. Oletetaan että $s_1 < s_2$. Jos $h(s_1) < h(s_2)$, niin nämä suorat leikkaavat alemmassa puolitasossa $t < 0$, ja jos taas $h(s_1) > h(s_2)$, niin karakteristikat leikkaavat ylemmässä puolitasossa. Leikkauspisteessä ratkaisun arvo ei ole määritelty.