Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, 1. luentoviikko

Petri Ola

Helsingin yliopisto

20.01.2014

Ensimmäisen kertaluvun lineaariset yhtälöt

Olkoot $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c_0(x, y)$ ja $c_1(x, y)$ jossain tasoalueessa D määriteltyjä **reaaliarvoisia** funktioita. Tutkimme aluksi osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c_0(x, y) + c_1(x, y)u \quad D\text{:ssä}$$

Olemme merkinneet $u_x = \partial u/\partial x$ jne. Erikoistapauksessa $c_1 = 0$ tällä on seuraava geometrinen tulkinta: Jos ajattelemme ratkaisua $u(x, y)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ pintana $z = u(x, y)$, niin tämän pinnan normaali on $(u_x, u_y, -1)$ ja ylläoleva yhtälö tarkoittaa että pinnan $z = u(x, y)$ normaali on joka pisteessä kohtisuorassa vektorikenttää (a, b, c_0) vastaan.

Yksinkertainen esimerkki

Tarkastellaan seuraavaa yhtälöä:

$$u_x = c_0 + c_1(x, y),$$

missä c_0 on vakio. Koska y:n suhteen ei derivoida, voimme ratkaista tämän suoraan integroimalla x:n suhteen. Yleinen ratkaisu on

$$u(x, y) = e^{c_0 x} \left(\int_0^x e^{-c_0 t} c_1(t, y)\, dt + \varphi(y) \right).$$

Tässä φ on mielivaltainen y:n funktio. Tämä määräytyy yksikäsitteisesti esim. alkuehdosta $u(0, y) = \varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}$. Huomaa että x–akselilla emme voi valita alkuarvoja mielivaltaisesti: esim. tapauksessa $c_1 = 0$ ainoa mahdollinen alkuarvo on $u(x, 0) = Ae^{c_0 x}$, missä A on vakio. Muilla alkuarvoilla **ei** ole olemassa ratkaisua.

Karakteristiset käyrät

Tarkastellaan yleisemmin ns. **kvasilineaarista yhtälöä**:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \quad D\text{:ssä}$$

Tavallisen differentiaaliyhtälösysteemin

$$\begin{cases} dx(t)/dt = a(x(t),y(t),u(t)) \\ dy(t)/dt = b(x(t),y(t),u(t)) \\ du(t)/dt = c(x(t),y(t),u(t)) \end{cases}$$

ratkaisuja kutsutaan **karakteristisiksi käyriksi**. Huomaa että lineaarisen yhtälön tapauksessa $x(t)$ ja $y(t)$ voidaan ratkaista kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä, ja tämän jälkeen $u(t)$ viimeisestä. Kvasilineaarisen yhtälön tapauksessa tämä ei ole yleensä mahdollista.

Alkuehdot

Pyrimme konstruoimaan ratkaisupinnan $z = u(x, y)$ yhdisteenä karakteristisista käyristä, jotka kulkevat hetkellä $t = 0$ annetun alkuarvokäyrän $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ kautta. Olkoon nyt $(x(t, s), y(t, s), u(t, s))$ alkuarvo–ongelman

$$\begin{cases} dx(t,s)/dt = a(x(t,s), y(t,s)), \\ dy(t,s)/dt = b(x(t,s), y(t,s)), \\ du(t,s)/dt = c(x(t,s), y(t,s), u(t,s)) \end{cases}$$

$$x(0, s) = x_0(s),\ y(0, s) = y_0(s),\ u(0, s) = u_0(s),$$

yksikäsitteinen ratkaisu. **Huom**: Lokaalista OY–lauseesta (DYII) seuraa että yo. ratkaisu on olemassa ja yksikäsitteinen jossain alkuarvokäyrän $\Gamma(s)$ ympäristössä, kunhan kerroinfunktiot ovat Lipschitz–jatkuvia.

Esimerkki I

Tarkastellaan seuraavaksi toista lineaarista alkuarvo–ongelmaa

$$u_x + u_y = 2,\ u(x,0) = x^2.$$

Valitsemme alkuarvokäyrän $\Gamma(s) = (s, 0, s^2)$, jolloin karakteristiset käyrät saadaan yhtälöstä

$$\begin{cases} dx(t,s)/dt = 1,\ x(0,s) = s \\ dy(t,s)/dt = 1,\ y(0,s) = 0 \\ du(t,s)/dt = 2,\ u(0,s) = s^2. \end{cases}$$

Tällä on ratkaisu $x = t + s$, $y = t$ ja $u = 2t + s^2$. Saamme siis $s = x - t = x - y$, joten

$$u(x,y) = 2y + (x-y)^2.$$