# Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 3, kevät 2014

Palautus ma 31.3. klo 16.00 mennessä

1. Ratkaise ongelma

$$u_{tt} - 4u_{xx} = e^{4x} + \sin t, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = (1+x^2)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Määritä alkuarvo–ongelman

$$u_{ttx} - u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u_x(x,0) = 0,\ u_{xt}(x,0) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

yleinen ratkaisu.

3. Ratkaise ns. *Darboux:n ongelma*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > \max\{-x, x\},\ t > 0,$$

$$u(x,t) = \phi_{\pm}(t), \quad x = \pm t,\ t \geq 0,$$

missä funktiot $\phi_+$ ja $\phi_- \in C^2([0,\infty))$ toteuttavat yhteensopivuusehdon $\phi_+(0) = \phi_-(0) = 0$. Mitä osaat sanoa ongelman yksikäsitteisestä ratkeavuudesta?

4. Ratkaise reuna–alkuarvo–ongelma

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = t(1+t)^{-1},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x \geq 0.$$

Mitä huomaat raja–arvosta

$$\lim_{x\to\infty} u(x,x)?$$

5. Määritä vakiokertoimisen Schrödinger–yhtälön

$$u_t = iku_{xx}$$

muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

olevat ratkaisut; tässä $k > 0$ on vakio.

6. Olkoon $\Omega$ rajoitettu $C^2$–tasoalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *Helmholtz–yhtälön*

$$\Delta u(x) - k^2 u(x) = 0,\ x \in \Omega,$$

ratkaisu, jolle $u|_{\partial\Omega} = 0$. Oletetaan, että $\operatorname{Re} k^2 > 0$. Osoita, että $u = 0$. **Vihje:** Käytä Greenin kaavoja!

7. Oletaan, että tason avoimessa osajoukossa $\Delta u(x) + x \cdot \nabla u(x) = 0$, missä $x = (x_1, x_2)$. Osoita, ettei $u$:lla voi olla aitoja lokaaleja maksimeja.

8. (Tämä on hieman hankalampi :)) Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| > 1\}$. Oletetaan että $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, $u$ harmoninen $B$:ssä ja että

$$\lim_{r\to\infty} \max_{|x|=r} u(x) = 0.$$

Osoita, että

$$\max_{\overline{B}} u = \max_{[x|=1} u.$$

9. Olkoon $\Omega$ tasoalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ yhtälön

$$\Delta u(x) + a(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = 0,\ x \in \Omega,$$

ratkaisu. Oletetaan, että kaikilla $x$ pätee $c(x) < 0$. Osoita, että jos $u|_{\partial\Omega} = 0$, niin $u = 0$ koko alueessa $\Omega$.

10. Olkoon $H = \{(x_1, x_2);\ x_2 > 0\}$ avoin ylempi puolitaso. Oletetaan, että $u \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$ on $H$:ssa harmoninen ja rajoitettu. Osoita, että

$$\sup_H u = \sup_{\partial H} u.$$

Onko väite totta, jos emme oleta että $u$ on rajoitettu? **Vihje:** Tutki aluksi harmonista funktiota

$$u(x_1, x_2) - \varepsilon \ln \sqrt{x_1^2 + (x_2+1)^2},$$

sopivassa rajoitetussa alueessa.

**Kirjallisuustehtävät**

Lue Evansin kirjasta *Partial Differential Equations* sivut 20–43, ja pyri vastaamaan seuraaviin kysymyksiin:

11. Oletetaan että $U \subset \mathbb{R}^d$ on rajoitettu ja yhtenäinen. Oletetaan että $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ on harmoninen $U$:ssa, ja $u \geq 0$ reunalla $\partial U$. Oletetaan, että $u(x_0) > 0$ jossain reunapisteessä $x_0$. Mitä voit sanoa $u$:n arvoista joukossa $U$?

12. Selitä, mikä on *Harnackin epäyhtälön* väite.

13. Mieti, onko perusratkaisu yksikäsitteinen, eli onko olemassa muita funktioita kuin luennolla määritellyt $\Phi(|x|)$, joilla kaikki esityskaavat olisivat voimassa.