

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 2, kevät 2014

Palautus viimeistään ma 3.3 klo 16.00 mennessä suoraan Joni Teräväiselle

1. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad u(x, 0) = x,$$

missä c on positiivinen vakio.

2. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xuu_x + yuu_y = 0, \quad u(x, x^2) = x^3, \quad x > 0.$$

3. Etsi ainakin viisi (5) eri ratkaisua ongelmalle

$$u_x + u_y = 1, \quad u(x, x) = x.$$

Vihje: Määrää ensin yhtälön $u_x + u_y = 1$ karkateristiset käyrät. Mitä huomaat alkuarvokäyrästä?

4. Määrää yhtälön

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

yleinen ratkaisu. **Vihje:** Tee sopiva lineaarinen muuttujanvaihto.

5. Määrää yhtälön

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = xy^2, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

yleinen ratkaisu.

6. Määrää se edellisen tehtävän ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad u_y(x, 0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. **Kirjallisuustehtävä.** Lue kirjasta *Stein-Shakarchi: Fourier Analysis, An Introduction*, Princeton University Press (2003) sivut 1-69, tai vaihtoehtoisesti monisteesta *Kari Astala: Fourier Analyysi*, sivut 1-36, ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- (a) Oletetaan, että periodisen ja integroituvan funktion f kaikki Fourier kertoimet häviävät. Jos f on jatkuva pisteessä θ_0 , mitä voit sanoa sen arvosta tässä pisteessä.
- (b) Kuinka määritellään ns. *hyvä perhe ytimiä*, eli *a family of good kernels*?
- (c) Ovatko Dirichlet-ytimet D_N perhe hyviä ytimiä? Perustele vastauksesi.
- (d) Anna esimerkki perhesstä hyviä ytimiä. Perustele taas vastauksesi.