Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, ratkaisut 3

Joni Teräväinen

1. Kyseessä on epähomogeeninen aaltoyhtälö. D'Alembertin kaavalla saadaan

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 0 + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \frac{1}{1+y^2} dy + \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} (e^{4s} + \sin\tau) ds d\tau \\
&= \frac{\arctan(x+2t) - \arctan(x-2t)}{4} + \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{4}\left(e^{4(x+2(t-\tau))} - e^{4(x-2(t-\tau))}\right) \\
&+ 4(t-\tau)\sin\tau d\tau \\
&= \frac{\arctan(x+2t) - \arctan(x-2t)}{4} - \frac{1}{64}e^{4x} + \frac{1}{64}e^{4x}\cosh(8t) - \sin t + t.
\end{aligned}
$$

2. Merkitään $U = u_x$. Tällöin $U_{tt} - U_{xx} = 0$ ja $U(x,0) = 0, U_t(x,0) = \sin x$. D'Alemberin kaava antaa

$$U(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t} \sin y dy = -\cos(x+t) + \cos(x-t).$$

Siispä

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t} \sin y dy = -\sin(x+t) + \sin(x-t) + \varphi(t),$$

missä $\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+)$ on mielivaltainen. Sijoittamalla nähdään, että nämä tosiaan kelpaavat.

3. Käytetään muuttujia $\xi = x+t, \eta = x-t$. Tällöin ketjusäännöllä $u_\xi = \frac{1}{2}(u_x + u_t), u_\eta = \frac{1}{2}(u_x - u_t)$ ja $uu_{\xi\eta} = u_{xx} - u_{tt} = 0$. Toisaalta ehto $t > \max\{-x, x\}, t > 0$ saa muodon $\xi, \eta > 0$. Yhtälöstä $u_{\xi\eta} = 0$ seuraa suoraan $u = f(\xi) + g(\eta)$ joillakin $f, g \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Saatiin siis

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$$

Koska $u(t,t) = \phi_+(t)$ ja $u(-t,t) = \phi_-(t)$, seuraa $f(t) = \phi_+(\frac{t}{2}) - g(0)$, $g(t) = \phi_-(-\frac{t}{2}) - f(0)$. Lisäksi $\phi_+(0) = \phi_+(0) = 0$, joten $f(0) + g(0) = 0$ eli

$$u(x,t) = \phi_+(\frac{x+t}{2}) + \phi_-(\frac{t-x}{2}).$$

Tämän funktion nähdään tosiaan toteuttavan vaaditut ehdot, ja yllä olevan päättelyn nojalla se on ainoa ratkaisu.

4. Tällä ongelmalla ei ole klassista ratkaisua, koska $u(0,t) \to 1$ kun $t \to 0^+$ mutta $u(x,0) \to 0$ kun $x \to 0^+$. Heikko ratkaisu kuitenkin löytyy. Alkuarvojen häviäminen positiivisella x-akselilla kertoo, että ratkaisu häviää alueessa $\{t \leq x\}$. Osoitetaan, että funktio

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{t-x}{1+t-x}, & t > x \geq 0 \\ 0, & x \geq t \geq 0 \end{cases}$$

on heikko ratkaisu. Se selvästi toteuttaa alkuehdot. Jos $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$ on testifunktio, niin osittaisintegroimalla ja käyttämällä tietoa $u_{tt} - u_{xx} = 0$ alueessa $t > x$ nähdään, että

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u(\phi_{tt} - \phi_{xx}) dx dt = 0,$$

joten u on heikko ratkaisu. Sille pätee $u(x,x) \to 0$ kun $x \to \infty$.

5. Separoitu funktio $u(x,t) = X(x)T(t)$ toteuttaa vakiokertoimisen Schrödinger-yhtälön jos ja vain jos $X(x)T'(t) = ikX''(x)T(t)$. Jos $X(x), T(t) \neq 0$, saadaan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = (ik)^{-1}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$, koska yhtälön eri puolet riippuvat eri muuttujista. Näistä tavallisista differentiaaliyhtälöistä ratkaistaan $X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$, $T(t) = C_3 e^{ik\lambda t}$. Siispä ratkaisuiksi saadaan

$$u(x,t) = e^{ik\lambda t}(A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}),$$

missä $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

6. Muistetaan Greenin kaavat: Jos Ω on rajoitettu C^2-alue $\mathbb{R}^d$:ssä ja ϕ ja ψ ovat C^2-funktiota alueessa Ω ja jatkuvia reunalla,

$$\int_\Omega (\phi\Delta\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)dx = \int_{\partial\Omega} \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\nu}dS(x)$$
$$\int_\Omega (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)dx = \int_{\partial\Omega} (\phi\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial\nu})dS(x).$$

Tässä Δ on Laplace-operaattori, dS tarkoittaa reunan pintamittaa ja $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$ on derivaatta normaalin suuntaan eli $n(x)\cdot\nabla\phi(x)$, missä $n(x)$ on yksikkönormaali pisteessä x (kannattaa verrata tätä kaavaa $\mathbb{R}$:n osittaisintegrointikaavaan, missä $\Omega = [a,b]$).

Jos u toteuttaa Helmoholz-yhtälön, niin $\bar{u}(\Delta u - k^2 u) = 0$ alueessa Ω. Integroimalla ja käyttämällä Greenin ensimmäistä kaavaa, saadaan, että jos $u = 0$ Ω:n reunalla, niin

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \bar{u}\Delta u dx - k^2\int_\Omega |u|^2 dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \bar{u}(n(x)\cdot u)dS(x) - k^2\int_\Omega |u|^2 dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - k^2\int_\Omega |u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Nyt koska $\mathrm{Re}(k^2) > 0$, ottamalla reaaliosat saadaan, että molemmat yllä olevat integraalit ovat nollia. Koska u:n normin neliön integraali on nolla, $u = 0$ Ω:ssa.

7. Oletetaan, että $\Delta u(x) + x\cdot\nabla u(x) = 0$ jossakin avoimessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Jos x_0 olisi aito lokaali maksimi, niin olisi $\nabla u(x_0) = 0$ ja $\Delta u(x_0) \le 0$, mutta tämä ei aivan riitä, sillä yhtäsuuruus voi päteä. Olkoon siis $\varepsilon > 0$, ja tarkastellaan funktiota

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2).$$

Tällä perturboidulla funktiolla ei ole lokaalia maksimia alueessa Ω, koska jos $\Delta u_\varepsilon(x_0) \le 0$ ja $\nabla u_\varepsilon(x_0) = 0$, niin $\Delta u(x_0) = \Delta u_\varepsilon(x) - \Delta(\varepsilon(x_1^2 + x_2^2)) = -4\varepsilon < 0$ ja $x_0 \cdot \nabla u(x_0) = x_0 \cdot \nabla(u - u_\varepsilon)(x_0) = -2\varepsilon(x_1^2 + x_2^2) < 0$, mikä on vastoin yhtälöä $\Delta u(x_0) + x_0 \cdot \nabla u(x_0) = 0$.

Oletetaan, että u:lla on aito lokaali maksimi pisteessä x_0, ja olkoon $\bar{B}$ jokin pisteen x_0 suljettu kiekkoympäristö, jossa u:n maksimi on aito. Tällöin

$$\max_{\partial \bar{B}} u(x) \ge \max_{\partial \bar{B}} u_\varepsilon(x) - \max_{\partial \bar{B}} (\varepsilon(x_1^2 + x_2^2)).$$

Koska u_ε ei voi saavuttaa maksimiaan kiekon sisällä, tämä on edelleen

$$\max_{\bar{B}} u_\varepsilon(x) - \max_{\partial \bar{B}} (\varepsilon(x_1^2 + x_2^2)) \to \max_{\bar{B}} u(x) = u(x_0),$$

kun $\varepsilon \to 0$, koska Ω on rajoitettu ja $u_\varepsilon \to u$ tasaisesti. Tämä tarkoittaa kuitenkin, että $u(x_0) \le \max_{\partial \bar{B}} u(x)$, mikä on mahdotonta, koska maksimi oli aito kiekossa $\bar{B}$.

8. *Tapa 1.* Peilataan tilanne yksikkökiekon sisälle; tarkastellaan funktiota $v(x) = u(\frac{1}{x})$, kun $x \in \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \le 1\}$ (tässä käytetään kompleksitasoa tavallisen tason sijasta, koska inversiolla ympyrän suhteen on siten siistimpi lauseke). Funktio $x \mapsto \frac{1}{x}$ on harmoninen, ja suora lasku osoittaa, että myös yhdistetty funktio v on harmoninen punkteeratussa avoimessa yksikkökiekossa (tai osoitetaan, että harmonisen ja analyyttisen funktion yhdistetty kuvaus on harmoninen).

Funktion u jatkuvuuden ja tehtävän oletuksen nojalla voitaisiin asettaa $v(0) = 0$, mutta jotta voidaan soveltaa maksimiperiaatetta, on osoitettava, että laajennettu funktio on harmoninen. Tunnetusti $u = \mathrm{Re}(f)$ jollakin analyyttisellä funktiolla jossakin origon punkteeratussa ympäristössä. Koska funktio f pysyy rajoitettuna origon ympäristössä, se laajenee tunnetusti myös origoon analyyttisenä (seuraa potenssisarjaesityksestä). Siten $\mathrm{Re}(f)$ on harmoninen jossakin origon ympäristössä ja $\mathrm{Re}(f(0)) = 0$, joten v on harmoninen myös origossa. Sovelletaan maksimiperiaatetta avoimessa yksikkökiekossa (se on rajoitettu ja avoin ja v on jatkuva sen reunalla). Sen mukaan

$$\max_{|x| \le 1} v(x) = \max_{|x| = 1} v(x).$$

Kun palataan alkuperäiseen funktioon u, väite on todistettu.

Tapa 2. Vähennetään u:sta sopiva alueessa $\bar{B}$ harmoninen funktio, jotta funktion käytöstä äärettömyydessä voitaisiin hallita. Olkoot siis $\varepsilon > 0$ ja

$$w_\varepsilon = u - v_\varepsilon;$$
$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon \log |x|.$$

Tällöin w_ε on harmoninen alueessa $\bar{B}$ ja $w_\varepsilon(x) \to -\infty$ kun $|x| \to \infty$, sillä tiedettiin $\lim_{r\to\infty} \sup_{|x|=r} u(x) = 0$. Tästä seuraa, että w_ε saavuttaa maksiminsa jossakin pisteessä $x_\varepsilon \in \bar{B}$. Jos x_ε ei ole alueen reunalla, sovelletaan vahvaa maksimiperiaatetta avoimessa, rajoitetussa alueessa $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < R\}$, missä R on mikä tahansa niin suuri luku, että $w_\varepsilon(x) < w_\varepsilon(x_\varepsilon)$ kun $|x| \geq R$. Silloin saadaan, että w_ε on vakio kyseisessä alueessa. Kun $R \to \infty$, saadaan, että w_ε on kaikkialla vakio. Se kuitenkin vähenee rajatta, mikä on ristiriita. Täten

$$\sup_{x\in\bar{B}} w_\varepsilon = \sup_{x\in\partial B} w_\varepsilon.$$

Nyt käytetään parametrin ε mielivaltaisuutta; koska $w_\varepsilon \leq u$, seuraa

$$\sup_{x\in\partial B} u \geq \sup_{x\in\partial B} u \geq \sup_{x\in\partial B} w_\varepsilon \to \sup_{x\in\partial B} u,$$

kun $\varepsilon \to 0$, sillä $w_\varepsilon \to u$ tasaisesti kun $\varepsilon \to 0$. Todistus on valmis.

9. Jos Ω ei ole rajoitettu, väite ei aina päde: olkoot vaikkapa $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, a(x) = 1, c(x) = -2, u(x_1, x_2) = e^{x_1} - e^{-2x_1}$. Tällöin $u|_{\partial(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})} = u|_{\{0\}} = 0$ ja $\Delta u = u_{x_1x_1}, \nabla u = u_{x_1}$, joten differentiaaliyhtälö saa muodon $u_{x_1x_1} + u_{x_1} - 2u = 0$, joka selvästi toteutuu.

Todistetaan väite rajoitetuille alueille. Voidaan olettaa symmetrian nojalla, että u on jossakin positiivista. Koska u on jatkuva kompaktissa joukossa $\bar{\Omega}$, se saavuttaa maksiminsa jossakin pisteessä $x_0 \in \bar{\Omega}$, ja $u(x_0) > 0$. Koska $u = 0$ Ω:n reunalla, niin $x_0 \in \Omega$. Siispä $\nabla u(x_0) = 0, \Delta u(x_0) \leq 0, c(x) < 0$. Kuitenkin yhdessä nämä ovat suora ristiriita.

10. Halutaan taas päästä tilanteeseen, jossa u:n maksimi saavutettaisiin jossakin pisteessä. Tätä varten tarkastellaan apufunktiota

$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon \log \sqrt{x_1^2 + (x_2+1)^2},$$

jonka nähdään helposti olevan harmoninen ylemmässä puolitasossa (tässä $\varepsilon > 0$). Funktio $w_\varepsilon = u - v_\varepsilon$ on harmoninen H:ssa, ja $w_\varepsilon(x) \to -\infty$ kun $|x| \to \infty$, koska u on rajoitettu ja $v_\varepsilon(x) \to -\infty$. Toisaalta $w_\varepsilon(x) \leq u(x)$ kaikkialla, joten w_ε saavuttaa maksiminsa jossakin pisteessä $x_\varepsilon \in \bar{H}$. Jos olisi $x_\varepsilon \in H$, niin vahva maksimiperiaate sovellettuna rajoitettuun alueeseen $\{|x_1| < R, 0 < x_2 < R\}$ sanoisi, että w on vakio tässä alueessa. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska R voidaan valita mielivaltaisen suureksi ja $w_\varepsilon(x) \to -\infty$ kun $|x| \to \infty$. Siispä $x_\varepsilon \in \partial H$ eli

$$\sup_{x \in H} w_\varepsilon(x) = \sup_{x \in \partial H} w_\varepsilon(x).$$

Toisaalta

$$\sup_{x \in \partial H} u(x) \geq \sup_{x \in \partial H} w_\varepsilon(x) \to \sup_{x \in \partial H} u(x),$$

kun $\varepsilon \to 0$, mikä todistaa väitteen. Jos u ei ole rajoitettu, väite ei välttämättä päde; valitaan vaikkapa $u(x) = x_2$.

11. Tässä tilanteessa voidaan sanoa, että $u > 0$ koko alueessa U. Nimittäin jos $u(x_1) \leq 0$ jollakin $x_1 \in U$, vahvan minimiperiaatteen ja oletuksen $u(x) \geq 0, x \in \partial U$ nojalla u on vakio. Koska $u(x_0) > 0$ jollakin x_0, u olisi sitten positiivinen vakio, eli joka tapauksessa $u > 0$ U:ssa.

12. Harnackin epäyhtälö (Evansin kirjan lause 2.11) sanoo, että jos V on rajoitetun alueen U osajoukko, jolle $\bar{V} \subset U$, niin on olemassa $C_V > 0$ siten, että

$$\inf_V u(x) \leq C_V \inf_V u(x)$$

jokaiselle harmoniselle ei-negatiiviselle funktiolle u alueessa U. Siispä mitä tahansa ei-negatiivista harmonista funktiota U:ssa voidaan ”vertailla” kahdella vakiolla.

13. Olkoon Φ Laplace-yhtälön $\mathbb{R}^d$:ssä perusratkaisu, eli

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, d = 2 \\ \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)}\frac{1}{|x|^{d-2}}, d > 2, \end{cases}$$

missä $\alpha(d)$ on yksikköpallon mitta. Greenin kaavan nojalla saadaan Poisson-yhtälön reuna-arvo-oneglman

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -f(x), \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

ratkaisulle esityskaava

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (-u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y) + \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y))dS(y) - \int_{\Omega} \Phi(x-y)\Delta u dy,$$

mistä nähdään, että funktiot f ja g yhdessä normaaliderivaatan arvojen kanssa riittävät määräämään u:n. Jos määritellään alueen Ω Greenin funktio $G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y)$, missä

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x(y) &= 0, y \in \Omega \\ \phi^x(y) &= \Phi(y-x), y \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

niin sijoittamalla nähdään, että

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)dS(y) + \int_{\Omega} \Phi(x-y)f(y)dy,$$

joten annetut f ja g tosiaan määräävät (potentiaalisen) ratkaisun Poissonin yhtälölle. Tarkastelemalla kahden ratkaisun erotusta ja soveltamalla maksimiperiaatetta nähdään itse asiassa, että tämä on ainoa mahdollinen ratkaisu.

Osoitetaan, että Φ määräytyy esityskaavastaan. Jos yllä oleva esityskaava pätisi kahdella eri funktiolla Φ_1, Φ_2, niin valitsemalla $g = 0$ erotukselle $\varphi = \Phi_1 - \Phi_2$ olisi voimassa

$$0 = \int_{\Omega} \varphi(x-y)f(y)dy$$

kaikilla $f \in L^1(\Omega)$. Jos nyt valitaan mielivaltainen $x \in \Omega$ ja $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ on hyvä perhe ytimiä, niin valita $f(y) = K_n(y-x)$ tuottaa $\varphi(x) = 0$, kun $n \to \infty$, joten $\varphi = 0$ ja Φ on yksikäsitteinen.