Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, ratkaisut 2

Joni Teräväinen

1. Jos merkitään kyseisen osittaisdifferentiaaliyhtälön karakteristisiä käyriä muodossa $(x(a,b), t(a,b), z(a,b))$, niin

$$\frac{dx}{da} = c \Rightarrow x(a,b) = ca + C_1(b)$$
$$\frac{dt}{da} = 1 \Rightarrow t(a,b) = a + C_2(b)$$
$$\frac{dz}{da} = -z^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = 1 \Rightarrow z(a,b) = \frac{1}{a + C_3(b)},$$

ja lisäksi $x(a,0) = a, t(a,0) = 0, z(a,0) = a$. Saadaan siis $x(a,b) = ca + b, t(a,b) = a, z(a,b) = \frac{1}{a+b^{-1}}$, joten $u(ca+b,a) = \frac{1}{a+b^{-1}}$. Merkitsemällä $x = ca + b, t = b$ saadaan $u(x,t) = \frac{1}{t+(x-ct)^{-1}} = \frac{x-ct}{1+xt-ct^2}$. (alueessa, jossa nimittäjä ei ole nolla).

2. Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\frac{dx}{dt} = xz \Rightarrow x(s,t) = C_1(s)e^{C_3(s)t}$$
$$\frac{dy}{dt} = yz \Rightarrow y(s,t) = C_2(s)e^{C_3(s)t}$$
$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z(s,t) = C_3(s).$$

Koska $x(s,0) = s, y(s,0) = s^2, z(s,0) = s^3$, tästä saadaan edelleen $x(s,t) = se^{s^3t}, y(s,t) = s^2e^{s^3t}, z(s,t) = s^3$. Pätee siis $u(se^{s^3t}, s^2e^{s^3t}) = s^3$ kaikila $s,t \in \mathbb{R}$. Merkinnöin $x = se^{s^3t}, y = s^2e^{s^3t}$ tulos on $u(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^3$, kun $x > 0$.

3. Karakteristiset yhtälöt kertovat tässä tapauksessa vain $u(t+s, t+s) = t+s$, joka tiedettiinkin jo. Jos $u(x,y) = ax + by$, $a + b = 1$, niin selvästi

$u_x + u_y = 1$ ja $u(x,x) = x$, joten ratkaisuja on äärettömän monta. Tosiaan transversaalisuusehto ei toteudu, koska

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Käytetään temppua, josta johtuen yksiulotteinen aaltoyhtälö $\mathbb{R}$:ssä on helppo ratkaista (toisin kuin aaltoyhtälö $\mathbb{R}^n$:ssä tai lämpöyhtälön vastaava ongelma). Voidaan kirjoittaa

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0,$$

ja ainakin heuristisesti edeltävä differentiaalioperaattori on $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$. Suora lasku osoittaakin, että näin tosiaan on. Jos vielä merkitään $\xi = x + y, \eta = x - y$, eli $x = \frac{\xi+\eta}{2}, \eta = \frac{\xi-\eta}{2}$, niin ketjusäännöllä saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(u_x - u_y).$$

Nyt siis alkuperäisestä yhtälöstä tuli $u_{\eta\eta} = 0$, josta seuraa $u_\eta = f(\xi)$ ja $u = \eta f(\xi) + g(\xi)$. Alkuperäisissä muuttujissa tämä tarkoittaa $u(x,y) = (x-y)f(x+y) + g(x+y)$, missä f ja g ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia.

5. Kuten edellä, jaetaan operaattori tekijöihin ja käytetään muuttujia $\xi = x + y, \eta = x - y$. Seuraa

$$u_{\xi\xi} = 4xy^2 = \frac{1}{2}(\xi+\eta)(\xi-\eta)^2 = \frac{1}{2}(\xi^3 + \eta^3 - \xi^2\eta - \xi\eta^2).$$

Integroimalla saavutetaan $u_\xi = \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi\eta^3 - \frac{1}{3}\xi^3\eta - \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + f(\eta)$ ja $u = \frac{1}{40}\xi^5 + \frac{1}{4}\xi^2\eta^3 - \frac{1}{12}\xi^4\eta - \frac{1}{6}\xi^3\eta^2 + \xi f(\eta) + g(\eta)$, joten

$$\begin{aligned} u(x,y) = \frac{1}{40}(x+y)^5 + \frac{1}{4}(x+y)^2(x-y)^3 - \frac{1}{12}(x+y)^4(x-y) \\ - \frac{1}{6}(x+y)^3(x-y)^2 + (x+y)f(x-y) + g(x-y) \end{aligned}$$

6. Alkuehdot $u(x,0) = \sin x, u_y(x,0) = \cos x$ merkitsevät $u(x,0) = \frac{1}{40}x^5 + xf(x) + g(x) = \sin x$ ja $u_y(x,0) = -\frac{13}{24}x^4 + f(x) - xf'(x) - g'(x) = \cos x$, koska

$$\begin{aligned}u_y(x,y) = &-\frac{13}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3y + \frac{15}{4}x^2y^2 + \frac{11}{6}xy^3 - \frac{37}{24}y^4 \\ &+ f(x-y) - (x+y)f'(x-y) - g'(x-y).\end{aligned}$$

Tiedetään siis

$$\begin{aligned}&\frac{1}{40}x^5 + xf(x) + g(x) = \sin x \\ &-\frac{13}{24}x^4 + f(x) - xf'(x) - g'(x) = \cos x,\end{aligned}$$

ja derivoimalla ensimmäinen yhtälö saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}x^4 + f(x) + xf'(x) + g'(x) = \cos x \\ &-\frac{13}{24}x^4 + f(x) - xf'(x) - g'(x) = \cos x.\end{aligned}$$

Kun yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan $-\frac{5}{12}x^4 + 2f(x) = 2\cos x$ eli $f(x) = \frac{5}{24}x^4 + \cos x$. Tästä seuraa suoraan $g(x) = \sin x - x\cos x - \frac{7}{30}x^5$. Täten ratkaisu on

$$\begin{aligned}u(x,y) = &\frac{1}{40}(x+y)^5 + \frac{1}{4}(x+y)^2(x-y)^3 - \frac{1}{12}(x+y)^4(x-y) \\ &-\frac{1}{6}(x+y)^3(x-y)^2 + (x+y)(\frac{5}{24}(x-y)^4 + \cos(x-y)) \\ &+\sin(x-y) - (x-y)\cos(x-y) - \frac{7}{30}(x-y)^5.\end{aligned}$$

7. Tunnetusti lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma äärellisessä kappaleessa eli

$$\begin{aligned}&u_t = u_{xx}, && 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), && 0 < x < L\end{aligned}$$

johtaa separoimalla muuttujat siihen, että lauseke

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-n^2(\frac{\pi t}{L})^2}$$

(eli separoitujen ratkaisujen lineaarikombinaatio) ratkaisee ongelman, kunhan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ja u:n sarja ja sen derivaatat suppenevat tasaisesti. Vastaavaan kysymykseen funktion esittämisestä trigonometrisena sarjana päädytään tarkasteltaessa aaltoyhtälöä äärellisessä kappaleessa. Yleisemmin, onko

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

joillakin c_n, jos f on 2π-periodinen (valinta $L = \pi$ ei tuota oleellista rajoitusta)? Tässä siis e^{inx} on kompleksinen trigonometrinen funktio. Jos määritellään f:n Fourier-kertoimet

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

niin funktioiden e^{inx} ortogonaalisuuden nojalla ja vaihtamalla summan ja integraalin paikat voitaisiin heuristisesti valita $c_n = \hat{f}(n)$ yllä. Fourier-sarjojen keskeinen kysymys onkin, milloin

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$$

suppenee lukuun $f(x)$ (ja missä mielessä).

(a) Jos integroituvan funktion f Fourier-kertoimet häviävät ja f on jatkuva pistessä θ_0, niin $f(\theta_0) = 0$ (katso Steinin ja Shakarchin kirja tai Astalan moniste; ideana on, että tässä tilanteessa $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)P(x)dx = 0$ jokaisella trigonometrisella polynomilla P). Siispä ainakin jatkuvalle funktiolle Fourier-kertoimet riittävät määräämään funktion.

(b) Perheen $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ sanotaan olevan hyvä perhe ytimiä, jos
(i) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = 1$ kaikilla n (keskiarvo on yksi)
(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|dx \leq C$ jollakin C (rajoitetut L^1-normit)

(iii) Jokaisella $\delta > 0$ pätee $\int_{|x|\geq\delta} |K_n(x)|dx \to 0$ kun $n \to \infty$ (massa keskittyy origoon).

Hyvien perheiden ytimiä idea on toimia funktiona, jotka approksimoivat Diracin deltaa (jolle $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x)dx = f(0)$ kaikilla f; tämä δ_0 ei ole klassisesti funktio). Nimittäin ominaisuudet takaavat, että $\|f - K_n * f\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$ jatkuville f (suppeneminen pätee muissakin normeissa). Tässä konvoluutio on

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy.$$

Koska lausekkeet muotoa $K_n * f$ esiintyvät usein muun muassa Fourier-analyysissä, on tärkeää tietää, milloin (K_n) on hyvä perhe, jolloin siis konvoluutiot suppenevat funktioon f.

(c) Muokataan yllä mainittua Fourier-sarjan osasumman lauseketta:

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dte^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}f(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t)f(t)dt \\
&= D_N * f(x),
\end{aligned}$$

missä

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = 2\Re\left(\frac{e^{i(N+1)x}-1}{e^x-1}\right) - 1 = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

ovat Dirichlet'n ytimet. Jos tämä olisi hyvä perhe ytimiä, kohdasta (b) seuraisi välittömästi jatkuvien funktioiden Fourier-sarjojen pisteittäinen suppeneminen. Valitettavasti ehto (ii) ei totuedu:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx \\
&= \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{|t|} dt = \sum_{k=-N}^{N} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{|\sin t|}{|t|} dt \\
&> \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{|k|+\frac{1}{2}} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} |\sin t| dt \\
&= (1-\cos 1) \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{|k|+\frac{1}{2}} \to \infty,
\end{aligned}
$$

kun $N \to \infty$.

(d) Valitaan $K_n(x) = 2\pi n \chi_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}(x)$, missä χ_A on joukon A karakteristinen funktio. Tällöin selvästi $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) = 1$. Koska $K_n(x) \geq 0$, myös ehto (ii) toteutuu. Lopuksi, jos $\delta > 0$ ja $\frac{1}{m} < \delta$, niin $\int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)| dx = 0$ kaikilla $n \geq m$, joten kolmaskin ehto totetutuu. Mielenkiintoisempi esimerkki olisi Fejérin yhtimet

$$
F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N}^{N} D_N(x),
$$

sillä siitä, että tämä on hyvä perhe ytimiä, seuraa

$$
\frac{S_1 f(x) + S_2 f(x) + \dots + S_N f(x)}{N} \to f(x)
$$

tasaisesti, kun f on jatkuva. Siispä jatkuvan funktion Fourier-sarja suppenee ainakin tässä heikommassa mielessä. Voidaan osoittaa (katso Stein ja Shakarchi tai Astala), että C^1-funktion Fourier-sarja suppenee pisteittäin. Yhdistelemällä yllä olvaa tietoa seuraa sitten, että ratkaisukaava lämpöyhtälön alkuarvo-ongelmalle pätee jatkuvasti derioituville alkuarvoille.