Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, ratkaisut 1

Joni Teräväinen

Kvasilineaarisen ensimmäisen kertaluvun yhtälön $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$ alkuehdolla $u(f_1(x), f_2(x)) = f_3(x)$ ratkaiseminen perustuu karakterististen käyrien löytämiseen; näitä käyriä pitkin yhtälö palautuu systeemiksi tavallisia differentiaaliyhtälöitä. Tarkemmin sanottuna jos funktiot x, y, z toteuttavat systeemin

$$\frac{dx(s,t)}{dt} = a(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$
$$\frac{dy(s,t)}{dt} = b(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$
$$\frac{dz(s,t)}{dt} = c(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

alkuehdoilla $x(s,0) = f_1(s), y(s,0) = f_2(s), z(s,0) = f_3(s)$, niin

$$\{(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : s, t \in \mathbb{R}) \subset \{(x, y, u(x,y)) : x, y \in \mathbb{R}\}\},$$

missä u on kuten yllä (olettaen että ratkaisu on u on olemassa jossakin alueessa). Tällöin siis $u(x(s,t), y(s,t)) = z(s,t)$. Koska karakteristisilla käyrillä on ylimääräinen parametri s, ne voivat hyvinkin peittää koko ratkaisupinnan – niin ei tosin aina käy.

Ratkaisun lokaali olemassaolo kannattaa (ja joskus pitää) tarkistaa transversaalisuusehdosta

$$\begin{vmatrix} a(f(s), g(s), h(s)) & f_1'(s) \\ b(f(s), g(s), h(s)) & f_2'(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

(tämä on rittävä muttei välttämätön ehto ratkaisun lokaalille olemassaololle ja yksikäsitteisyydelle).

1. Tässä yhtälössä $a(x,y,u) = 1, b(x,y,u) = 1$ ja $c(x,y,u) = 4$. Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x(s,t) = t + C_1(s)$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow y(s,t) = t + C_2(s)$$
$$\frac{dz}{dt} = 4 \Rightarrow z(s,t) = 4t + C_3(s).$$

Ehdosta $u(s,0) = f(s)$ seuraa suoraan $C_1(s) = s, C_2(s) = 0$ ja $C_3(s) = f(s)$. Näin muodostuvat karakteristiset käyrät ovat suorat muotoa $\{(t+s, t, 4t + f(s)) : t \in \mathbb{R}\}$, missä $s \in \mathbb{R}$. Projektiot xy-tasoon ovat $\{(t+s,t) : t \in \mathbb{R}\}$.

2. Edellisessä tehtävässä saatiin karakteristiset käyrät, joten $u(t+s,t) = 4t + f(s)$. Merkitsemällä $x = t+s, y = t$ tämä tarkoittaa $u(x,y) = 4y + f(x-y)$. Tämän voi tarkistaa sijoittamalla ongelmaan. Helposti voidaan tarkistaa myös transversaalisuusehto: determinantti on

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

3. Tässä $a(x,y,u) = x, b(x,y,u) = x+y, c(x,y,u) = 1$. Saadaan systeemi

$$\frac{dx}{dt} = x(s,t) \Rightarrow x(s,t) = C_1(s)e^t$$
$$\frac{dy}{dt} = x(s,t) + y(s,t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = C_1(s)e^t + y(s,t) \Rightarrow y(s,t) = C_2(s)e^t + C_1(s)te^t$$
$$\frac{dz}{dt} = 1 \Rightarrow z(s,t) = t + C_3(s).$$

(yhtälön $y' = ke^t + y$ voi ratkaista lineaarisena ensimmäisen kertaluvun yhtälönä tai lisäämällä yksittäisratkaisun homogeeniyhtälön ratkaisuun). Sijoitettaessa ehto $u(1,s) = s$ saadaan $x(s,t) = e^t, y(s,t) = se^t + te^t, z(s,t) = t+s$. Siispä $u(e^t, se^t + te^t) = t + s$. Muuttujanvaihdolla $x = e^t, y = s$ tästä tulee $u(x,xy) = y$ kun x on positiivinen. Edelleen korvaamalla xy muuttujalla y saadaan $u(x,y) = \frac{y}{x}$, kun $x > 0$. Koska funktiolla $x \mapsto \frac{1}{x}$ on singulariteetti origossa, u ei laajene jatkuvaksi suurempaan puolitasoon. Ratkaisu voidaan taas tarkistaa sijoittamalla. Transversaalisuusehtoon liittyvä determinantti on

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s+1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

joten alkuarvokäyrän $(1, s, s)$ ympäristössä on yksikäsitteinen ratkaisu (tämähän tiedettiin jo).

4. Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 1 \Rightarrow x(s,t) = t + C_1(s) \\
\frac{dy}{dt} &= 1 \Rightarrow y(s,t) = t + C_2(s) \\
\frac{dz}{dt} &= z(s,t)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = -1 \Rightarrow z(s,t) = \frac{1}{C_3(s) - t}.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla $u(0,s) = 1$ nähdään $x(s,t) = t, y(s,t) = t + s, z(s,t) = \frac{1}{1-t}$. Täten $u(t, t+s) = \frac{1}{1-t}$, ja merkitsemällä $x = t, y = t + s$ saadaan $u(x,y) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$. Koska ratkaisun halutaan olevan määritelty jossakin alueessa ja olevan erityisesti jatkuva, on valittava $x < 1$ tai $x > 1$ (jälleen funktiolla on singulariteetti, kun $x = 1$). Jälkimmäisessä tapauksessa alkuarvoja ei voi sijoittaa, joten $x < 1$. Tämän voi tarkistaa kelpaavan. Transversaalisuusehto voidaan tarkistaa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

5. Jälleen

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= z(s,t)^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = C_3(s)^2 \Rightarrow x(s,t) = C_3(s)^2 t + C_1(s) \\
\frac{dy}{dt} &= 1 \Rightarrow y(s,t) = t + C_2(s) \\
\frac{dz}{dt} &= 0 \Rightarrow z(s,t) = C_3(s)
\end{aligned}$$

(huomaa, että ylin yhtälö ratkaistaan viimeisenä). Tieto $u(s,0) = s^2 + s$ kertoo $y(s,t) = t, z(s,t) = s^2 + s$ ja lopuksi $x(s,t) = t(s^2+s)^2 + s$. Siispä saadaan implisiittiratkaisu $u(t(s^2+s)^2 + s, t) = s^2 + s$ (se ei sievene muotoon $u(x,y) = ...$ ilman neljännen asteen yhtälön ratkaisemista). Tarkistetaan, että implisiittikaava tosiaan määrittelee yksikäsitteisen ratkaisun käyrien $(s, 0, s^2+s)$ ympäristössä. Transversaalisuusdeterminantti on

$$\begin{vmatrix} (s^2+s)^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

joten lokaali yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa jossakin alkuarvokäyrien avoimessa ympäristössä.

6. Karakteristinen systeemi on

$$\frac{dx}{dt} = x(s,t) \Rightarrow x(s,t) = C_1(s)e^t$$
$$\frac{dy}{dt} = x(s,t)^2 + y(s,t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = C_1(s)^2 e^{2t} + y(s,t) \Rightarrow y(s,t) = C_1(s)^2 e^{2t} + C_2(s)e^t$$
$$\frac{dz}{dt} = 1 - (\frac{y(s,t)}{x(s,t)} - x(s,t))z(s,t) \Rightarrow z(s,t) = C_3(s).$$

Käyttämällä tietoa $u(1,s) = 0$ saadaan $x(s,t) = e^t, y(s,t) = e^{2t} + (s-1)e^t$. Siispä

$$\frac{dz}{dt} = 1 - (s-1)z(s,t),$$

ja ratkaisemalla tämä ensimmäisen kertaluvun lineaarinen yhtälö saadaan

$$z(s,t) = \frac{1}{s-1} + C_3(s)e^{-(s-1)t}.$$

Alkuarvo antaa

$$z(s,t) = \frac{1}{1-s}(1 - e^{(1-s)t}).$$

Sijoitusten $x = e^t > 0$ ja $y = e^t(e^t + s - 1)$ avulla saadaan $s - 1 = \frac{y}{x} - x$, joten $u(x,y) = \frac{1}{\frac{y}{x} - x} x^{\frac{y}{x} - x} = \frac{x}{y - x^2} x^{\frac{y}{x} - x}$. Ratkaisu on määritelty, kun $x > 0$ ja rajoitutaan sen lisäksi joko puolitasoon $y > x^2$ tai $y < x^2$. Tälle ratkaisulle $u(2,4)$ ei siis ole määritelty.

Transversaalisuusehdostakin voidaan tarkistaa, että tämä tosiaan tuottaa lokaalisti yksikäsitteisen ratkaisun käyrän $\{(1,s,0) : s \in \mathbb{R}\}$ ympärisötssä:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1+s & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

7. Tässä tehtävässä voidaan laskea, että karakteristiset käyrät ovat $(se^t, 0, s^2e^{2t})$, mutta nämähän kertovat meille vain alkuehdon $u(x,0) = x^2$. Sijoittamalla nähdään, että esimerkiksi $u(x,y) = x^2$ ja $u(x,y) = x^2 + y^2$ kelpaavat. Yhtälöön liittyvä determinantti on

$$\begin{vmatrix} s & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

joten tämä ei ole ristiriita transversaalisuusehdolle.

8. Karakteristisista yhtälöistä tulee helpommat, kun kirjoitetaan yhtälö muodossa $\frac{xu}{u^2-1}u_x + \frac{yu}{u^2-1}u_y = 1$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{x(s,t)z(s,t)}{z(s,t)^2-1} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{y(s,t)z(s,t)}{z(s,t)^2-1} \\
\frac{dz}{dt} &= 1 \Rightarrow z(s,t) = t + C_3(s).
\end{aligned}$$

Alkuarvon nojalla $z(s,t) = t + s^3$. Nyt $\frac{x'(s,t)}{x(s,t)} = \frac{(t+s^3)}{(t+s^3)^2-1}$. Funktion $\frac{t+c}{(t+c)^2-1}$ integraalifunktio saadaan huomaamalla, että se on muotoa $\frac{f'}{2f}$, ja tulos on $\frac{1}{2}\log|(t+c)^2-1|$ (ja vakio). Siispä

$$\begin{aligned}
x(s,t) &= \exp(\frac{1}{2}\log|(t+s^3)^2-1| + C_1(s)) \\
&= e^{C_1(s)}\sqrt{|(t+s^3)^2-1|}.
\end{aligned}$$

Sijoituksella $x(s,0)=s$ saadaan

$$x(s,t)=\frac{s}{\sqrt{|s^6-1|}}\sqrt{|(t+s^3)^2-1|}.$$

Samoin

$$y(s,t)=\frac{s^2}{\sqrt{|s^6-1|}}\sqrt{|(t+s^3)^2-1|},$$

kun $s\neq 1$. Nyt on saatu implisiittiratkaisu. Koska

$$\begin{vmatrix} \frac{s^4}{s^6-1} & 1 \\ \frac{s^5}{s^6-1} & 2s \end{vmatrix} = \frac{s^5}{s^6-1},$$

niin implisiittiratkaisu on yksikäsitteinen alkuarvokäyrän ympäristössä, kun asetetaan joko rajoitus $0<s<1$ tai $s>1$.

9. Tässä $a(x,y,u)=u, b(x,y,u)=1, c(x,y,u)=-\frac{1}{2}u$. Transversaalisuusehto pätee, koska

$$\begin{vmatrix} \sin s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Siksi alkuarvokäyrän jossakin ympäristössä on yksikäsitteinen ratkaisu.

10. Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=z(s,t)\Rightarrow\frac{dx}{dt}=C_3(s)e^{-\frac{1}{2}t}\Rightarrow x(s,t)=-2C_3(s)e^{-\frac{1}{2}t}+C_1(s)\\
&\frac{dy}{dt}=1\Rightarrow y(s,t)=t+C_2(s)\\
&\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{2}z(s,t)\Rightarrow z(s,t)=C_3(s)e^{-\frac{1}{2}t}.
\end{aligned}$$

Ehto $u(s,0)=\cos s$ antaa $y(s,t)=t, z(s,t)=(\cos s)e^{-\frac{1}{2}t}$ ja $x(s,t)=-2(\cos s)e^{-\frac{1}{2}t}+(s+2\cos s)$. Tässä on implisiittiratkaisu, joten riittää tarkistaa transversaaliusehto. Determinantti on

$$\begin{vmatrix} \cos s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

joten alkuarvokäyrän ympäristössä implisiittiehto määrää ratkaisun yksikäsitteisesti.