Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, 2014
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä 7

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)\,dt,\ x \in \mathbb{R},$$
on jatkuva.

2. Laske raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)^n dx.$$

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sellainen integroituva funktio, että
$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että
$$\lim_{r\to\infty} \sup\{|f(x)|\colon |x| > r\} = 0.$$

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituva funktio. Osoita, että
$$m\big(\{x \in A\colon |f(x)| > c\}\big) \le \frac{1}{c}\int_A |f|$$
jokaisella $c > 0$.

5. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-2}}\,dx.$$

6. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että funktiot
$$g_n(x) = \frac{\cos f(x)}{1 + n\big(f(x)\big)^2}$$
ovat integroituvia yli välin $[0,1]$ ja että on olemassa raja-arvo
$$a = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx\,.$$
Mitä arvoja a voi saada, kun f käy läpi kaikki mitalliset funktiot $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$?