Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, 2014
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä 6

1. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mitallisia joukkoja R^n:ssä. Oletetaan, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita, että
$$pm(A) \geq \sum_{i=1}^{k} m(A_i),$$
missä $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$.

2. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x + \sin^k x}}\, dx.$$

3. Olkoon $1 \leq p < \infty$ kiinteä, $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko sekä $f_j\colon E \to [0, +\infty]$ jono mitallisia funktioita. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ kaikilla $x \in E$ ja että on olemassa sellainen vakio $M < \infty$, että
$$\int_E |f_j|^p \leq M,$$
kun $j = 1, 2, \ldots$. Osoita, että $\int_E |f|^p \leq M$.

4. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x + \tan^k x}}.$$

5. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$

6. Oletetaan, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen ja $f\colon E \to [0, +\infty]$ on mitallinen funktio, jolle $\int_E f < \infty$. Asetetaan
$$E_j = \{x \in E\colon f(x) > j\},\ j \in \mathbb{N}.$$
Osoita, että
$$\lim_{j\to\infty} j \cdot m(E_j) = 0.$$