Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, 2014
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä 5

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritellään funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } \sin x \in \mathbb{Z}; \\ \cos x, & \text{muulloin.} \end{cases}$$
Osoita, että g on mitallinen.

2. (a) Osoita, että jokainen kasvava funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.
   (b) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava. Osoita, että yhdistetty funktio $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mikä tahansa funktio. Määritellään $g\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$ asettamalla
$$g(x) = \inf\{f(y)\colon |x-y| < 2\}$$
jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että g on mitallinen.

4. Anna esimerkki jonosta jatkuvia funktioita $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$, mutta Riemannin integraalien $\int_0^1 f_i(x)\,dx$ jonolla ei ole raja-arvoa.

5. Etsi funktion $2\chi_{[0,3]} + 5\chi_{[1,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$ normaaliesitys ja laske sen integraali.

6. Esitetään rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ muodossa $\mathbb{Q} = \{q_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Määritellään sitten funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla
$$f(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ |q_n - x| < 1}} 2^{-n}.$$
Osoita, että f on mitallinen.