

1. Jos $(A_n)_{n=1}^\infty$ on jono joukon X osajoukkoja, niin merkitään

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \quad \text{ja} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

[$\liminf = \textit{limes inferior}$, $\limsup = \textit{limes superior}$]

Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $A_j \in \Gamma$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

- (a) Osoita, että

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j \in \Gamma, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j \in \Gamma$$

ja

$$\mu(\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{j \geq k} \mu(A_j) \right).$$

- (b) Osoita, että

$$\mu(\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{j \geq k} \mu(A_j) \right),$$

jos $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) < \infty$.

- (c) Todista ns. Borel-Cantelli lemma: Jos $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$, niin $\mu(\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j) = 0$ eli melkein mikään piste ei kuulu äärettömän moneen A_j :hin.

2. Todista seuraava lause: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Tällöin

- (a) $\forall \varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoin $G \supset A$ s.e. $m(G \setminus A) < \varepsilon$;
- (b) $\forall \varepsilon > 0$ kohti on olemassa suljettu $F \subset A$ s.e. $m(A \setminus F) < \varepsilon$;
- (c) $m(A) = \inf\{m(G) : G \supset A, G \text{ avoin}\}$;
- (d) $m(A) = \sup\{m(F) : F \subset A, F \text{ kompakti}\}$.

Ohje: Käsittele (a)-kohdassa ensin tapaus, jossa A on rajoitettu.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen ja $m(A) < \infty$.

- (a) Osoita, että funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$,

$$f(x) = m(A \cap]-\infty, x])$$

on tasaisesti jatkuva.

- (b) Osoita, että on olemassa mitallinen joukko $B \subset A$, jolle

$$m(B) = \frac{1}{2}m(A).$$

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa joukot B_1, B_2, \dots siten, että $A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja rajoittumakuvaus $f|_{B_i}$ on mitallinen jokaisella i . Osoita, että f on mitallinen.
5. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Osoita, että joukko
$$A = \{x \in \mathbb{R}^n: f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$$
on Borel-joukko.
6. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A \in \Gamma$, ja $B \in \Gamma$. Osoita, että
$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B) + \mu(A) + \mu(B).$$