Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, 2014
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä 3

1. Olkoot A ja B mitallisia joukkoja $\mathbb{R}^n$:ssä, $m(B) = 0$, ja $E \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että $A \setminus B \subset E \subset A \cup B$. Osoita, että E on mitallinen ja $m(E) = m(A)$.

2. Olkoon $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ jono mitallisia joukkoja, joille $m(E_i \cap E_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Osoita, että
$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

3. Olkoon ∂E joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ reuna (ts. $\partial E = \overline{E} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus E})$). Osoita: jos $m^*(\partial E) = 0$, niin tällöin E on mitallinen. Anna esimerkki mitallisesta joukosta $E \subset \mathbb{R}$, jolle $m^*(\partial E) > 0$.

4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa mitallinen joukko $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $E \subset G_\varepsilon$ ja $m^*(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$. Osoita, että E on mitallinen joukko.

5. (a) Olkoon $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\Gamma = \mathcal{P}(X)$ ja $\mu(A) = \#A/k$, missä $\#A$ on A:n alkioiden lukumäärä. Osoita, että kolmikko (X, Γ, μ) on mitta-avaruus.
   (b) Oletetaan, että $a_j \geq 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Määritellään $\mu(A) = \sum_{j \in A} a_j$ kaikilla $A \subset \mathbb{N}$. Osoita, että $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ on todennäköisyysmitta.

   Joukkojen $A \subset X$ ja $B \subset X$ *symmetrinen erotus* on
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $m(A) < \infty$. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoimet n-välit $I_1, I_2, \ldots, I_k$ siten, että
$$m\Big(A \triangle \Big(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\Big)\Big) < \varepsilon.$$