Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, 2014
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä 2

1. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? (Perustelut!)
   (a) Jos $m^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon.
   (b) Jos $m^*(A) < \infty$, niin A on rajoitettu.

2. Sanomme, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz*, jos on olemassa vakio $L > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on 0-mittainen ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, niin myös kuvajoukko fA on mitallinen ja $m(fA) = 0$.

3. (*Lindelöfin lause*:) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko ja $\mathcal{G} = \{U_i\colon i \in I\}$ joukon A avoin peite (ts. $A \subset \cup_{i\in I} U_i$ ja jokainen U_i on $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko). Osoita, että $\mathcal{G}$ sisältää A:n *numeroituvan* osapeitteen $\{U_{i_k}\colon k \in \mathbb{N}\}$.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että jokaisella $x \in A$ on olemassa (avoin) kuula $B(x, r_x)$, jolla $m_n^*\big(A \cap B(x, r_x)\big) = 0$. Osoita, että $m_n^*(A) = 0$.

5. Osoita, että tason osajoukko
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\}$$
on mitallinen ja $m_2(G) = 0$.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. (a) Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}^n$, jolle $A \subset B$ ja
$$m_n^*(B) \le m_n^*(A) + \varepsilon.$$
(b) Osoita, että on olemassa avoimet joukot $B_k \subset \mathbb{R}^n$ s.e.
$$A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{ja} \quad m_n^*\big(\cap_{k=1}^{\infty} B_k\big) = m_n^*(A).$$