Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, 2014
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä 1

1. Määritä

$\inf\left\{\frac{1}{x} : x > 0\right\}$, $\sup\left\{\frac{1}{x} : x > 0\right\}$, ja $\inf\left\{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{R}, y > x + 1\right\}$.

2. Olkoon $A \subset [0, 1/2]$ sellainen joukko, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy $x \in A$, jolle $x - x^3 < \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$. Osoita, että $\inf A = 0$.

3. Joukkojen $A \subset X$ ja $B \subset X$ *symmetrinen erotus* on

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Olkoot A, B ja C X:n osajoukkoja. Osoita, että
(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
(b) $A \triangle X = A^c$,
(c) $A \triangle \emptyset = A$,
(d) $A \triangle A = \emptyset$.

4. (a) Osoita, että $\mathbb{R}^n$:n avoin kuula $B(x, r)$ on avoin joukko jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$.
(b) Osoita, että ($\mathbb{R}^n$:n) avoimen kuulan $B(x, r)$ sulkeuma $\overline{B(x, r)}$ on suljettu kuula $\bar{B}(x, r)$.

5. Olkoon $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jono X:n osajoukkoja. Merkitään

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \quad \text{ja} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

[lim inf = *limes inferior*, lim sup = *limes superior*]
(a) Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

(b) Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja

$$A_n = \begin{cases} [0, 1 + 1/n], & \text{jos } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}, \\ [-1 - 1/n, 0], & \text{jos } n = 2m - 1,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Määrää $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ja $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

6. Kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ on *algebrallinen*, jos on olemassa luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ ja kokonaisluvut $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, jotka eivät ole kaikki nollia, siten, että

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0.$$

Osoita, että algebrallisten lukujen joukko on numeroituva.