

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 7
Ylimääräiset harjoitukset, 2014

Näillä tehtävillä voi korottaa laskuharjoituksista saatavien lisäpisteiden määrää. Palautettava kirjallisesti joko luennoitsijalle tai laskuharjoitusten pitäjille maanantaihin 3.3 klo 16 mennessä.

1. Laske raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx.$$

2. Olkoon $A \in \text{Leb } \mathbb{R}^n$, $m(A) < \infty$, ja (f_j) jono integroituvia funktioita $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$. Oletetaan, että $f_j \rightarrow f$ tasaisesti A :ssa. Osoita, että f on integroituva ja

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j = \int_A f.$$

3. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integroituva ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktio $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

on jatkuva.

4. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa mitallinen $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $m(A) < \infty$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f| < \varepsilon.$$

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-nx^2} dx.$$

6. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx.$$