

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 5
17-21.2.2014

1. Osoita, että mitallisten funktioiden $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ tulo fg on mitallinen.

2. Etsi $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$ ja $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$, kun:

(a)

$$a_k = \frac{1 + 2k \sin \frac{k\pi}{8}}{3 + 4k};$$

(b)

$$a_k = (-1)^k \frac{k^2 + 5k}{2k^2 - 4k};$$

(c)

$$a_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} 2^{-j}.$$

3. Oletetaan, että lukujonolla $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on olemassa osajono $(a_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, jolla on raja-arvo $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = a$. Osoita, että silloin pätee

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq a \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k.$$

4. Olkoon f_1, f_2, \dots jono mitallisia funktioita $A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko $B = \{x \in A: \exists \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)\}$ on mitallinen.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita.

(a) Osoita, että joukot

$$A_j = \{x \in A: f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$$

ovat mitallisia.

(b) Osoita, että joukko

$$\{x \in A: \text{jono } (f_k(x))_{k=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\}$$

on mitallinen.

6. Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että myös sen positiivisosa $f^+: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f^+(x) = \max(0, f(x))$, on mitallinen.