Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 4
10-14.2.2014

1. Osoita, että joukko $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 1 \text{ ja } 0 \leq yx^2 < 1\}$ on mitallinen.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f \colon A \to \mathbb{R}$. Olkoon
$$A_r = \{x \in A \colon f(x) > r\},$$
kun $r \in \mathbb{R}$. Osoita: jos $m_n^*(A_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että $m_n^*(A_r) > 0$.

3. Olkoot A_j, $j \in J$, erillisiä mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, joilla $m_n(A_j) > 0$ kaikilla $j \in J$. Osoita, että J on numeroituva.

4. Osoita, että on olemassa erilliset joukot $A \subset \mathbb{R}$ ja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}$, että
$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

5. Olkoot joukot $A_k \subset [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots,$ mitallisia. Oletetaan, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa
$$m(A_k) > \frac{2^k - 1}{2^k}.$$
Osoita, että leikkausjoukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on epätyhjä.

6. Osoita, että funktio $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}; \\ x^2, & \text{jos } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
on mitallinen.