

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 3
3-7.2.2014

1. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? (Perustelut!)
 - (a) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin reunajoukko ∂A on mitallinen.
 - (b) Jos $B \subset \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa joukko, niin ∂B on mitallinen.
 - (c) Jos $A \subset \mathbb{R}$ on avoin ja rajoitettu, niin $m_1(\partial A) = 0$.
2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoita, että

$$m^*(A \cup E) + m^*(A \cap E) = m^*(A) + m^*(E).$$

3. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}\}$. Osoita, että A on mitallinen ja laske $m_2(A)$.
4. Näytä, että \mathbb{R}^2 :n osajoukko $\{(x, y) : x \in \mathbb{Q} \text{ tai } y \notin \mathbb{Q}\}$ on mitallinen.
5. Olkoon

$$\mathcal{F}_\sigma = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i : F_i \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu kaikilla } i \right\}$$

ja

$$\mathcal{G}_\delta = \left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i : G_i \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin kaikilla } i \right\}.$$

Osoita, että $\mathcal{F}_\sigma \subset \text{Bor } \mathbb{R}^n$ ja $\mathcal{G}_\delta \subset \text{Bor } \mathbb{R}^n$, missä $\text{Bor } \mathbb{R}^n$ on kaikkien \mathbb{R}^n :n Borelin joukkojen perhe.

6. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva ja $A \subset \mathbb{R}^n$ suljettu. Osoita, että $fA \in \mathcal{F}_\sigma$.