Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 2
27-31.1.2014

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (t_1 x_1, t_2 x_2)$, missä $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Osoita, että
$$m_2^*(fA) = |t_1 t_2| m_2^*(A)$$
kaikilla $A \subset \mathbb{R}^2$.

2. Sanomme, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz*, jos on olemassa vakio $L > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on 0-mittainen ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, niin myös kuvajoukko fA on mitallinen ja $m(fA) = 0$.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja $A \subset \mathbb{R}$, $m(A) = 0$. Osoita, että $m(fA) = 0$. [Neuvo: Käsittele ensin tapaus, jossa A on rajoitettu, käyttäen väliarvolausetta.]

4. Olkoon $A \subset [2, 4]$. Osoita, että
$$12\, m_1^*(A) \leq m_1^*\big(\{x^3 \colon x \in A\}\big) \leq 48\, m_1^*(A).$$
Voidaanko 12 (vast. 48) korvata millään suuremmalla (vast. pienemmällä) luvulla?

5. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos
$$m^*(S \cup U) = m^*(S) + m^*(U)$$
kaikilla $S \subset E$ ja $U \subset \mathbb{R}^n \setminus E$.

6. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos
$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E)$$
jokaisella avoimella n-välillä I. [Voit pitää tunnettuna, että $m^*(I) = \ell(I)$, kun I on n-väli.]