Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 1
20-24.1.2014

1. (a) Määritä $\inf E$ ja $\sup E$, kun $E = \{\frac{1}{\log x} \in \mathbb{R} \colon x > 1\}$.
   (b) Oletetaan, että $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että
   $$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A.$$
   (c) Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ja $-2A = \{-2x \colon x \in A\}$. Osoita, että
   $$\inf(-2A) = -2 \sup A.$$

2. Olkoot $V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}^n$ avoimia ja $F_1, \ldots, F_k \subset \mathbb{R}^n$ suljettuja osajoukkoja. Näytä, että $\cap_{j=1}^{k} V_j$ on avoin ja $\cup_{j=1}^{k} F_k$ on suljettu joukko. Etsi lisäksi esimerkit seuraavista ilmiöistä: (a) $V_j \subset \mathbb{R}$ on avoin jokaisella $j \in \mathbb{N}$, mutta leikkaus $\cap_{j=1}^{\infty} V_j$ ei ole avoin joukko; (b) $F_j \subset \mathbb{R}$ on suljettu jokaisella $j \in \mathbb{N}$, mutta yhdiste $\cup_{j=1}^{\infty} F_j$ ei ole suljettu joukko.

3. Olkoon I ylinumeroituva joukko ja $a_i > 0$ kaikilla $i \in I$. Osoita, että
   $$\sum_{i \in I} a_i := \sup_{J \subset I \text{ äärellinen}} \sum_{j \in J} a_j = +\infty.$$

4. Olkoon
   $$\mathcal{B} = \{B^n(x, r) \subset \mathbb{R}^n \colon x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$
   Osoita, että $\mathcal{B}$ on numeroituva. [Toisin sanoen, $\mathcal{B}$ on kokoelma sellaisia $\mathbb{R}^n$:n avoimia kuulia $B^n(x, r)$, joiden keskipisteiden x koordinaatit ovat rationaalilukuja ja säteet r ovat positiivisia rationaalilukuja.]

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ numeroituva. Osoita suoraan ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_2^*(A) = 0$.

6. Olkoon $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0, 1]\}$ sen kuvaaja. Osoita, että $m_2^*(G_f) = 0$.