Mitta ja integraali, kevät 2014
Ratkaisuja 22.3.2012 järjestettyyn erilliskokeeseen
Olli Tapiola (`olli.tapiola@helsinki.fi`)

---

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$, että $A \subset G$ ja $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan aluksi, että joukko A on rajoitettu. Nyt on siis olemassa sellainen joukon A avoin Lebesguen peite $\mathcal{F}_{A,\varepsilon} = \{I_i : i \in \mathbb{N}\}$, että $S(\mathcal{F}_{A,\varepsilon}) \leq m(A) + \varepsilon$. Merkitään tällöin

$$G := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i,$$

jolloin G on avoin joukko. Toisaalta nyt Carathéodoryn ehdon nojalla pätee

$$\begin{aligned} m(G) &= m(G \cap A) + m(G \setminus A) \\ &\overset{A \subseteq G}{=} m(A) + m(G \setminus A), \end{aligned}$$

joten koska $m(A) < \infty$, niin

$$m(G \setminus A) = m(G) - m(A) = S(\mathcal{F}_{A,\varepsilon}) - m(A) < m(A) + \varepsilon - m(A) = \varepsilon.$$

Olkoon joukko A sitten mielivaltainen. Huomataan nyt, että

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap B(\bar{0}, k) =: \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

jossa A_k on rajoitettu joukko jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Siten edellisen nojalla jokaiselle joukolle A_k löytyy sellainen avoin joukko G_k, että $A_k \subseteq G_k$ ja $m(G_k \setminus A_k) < \varepsilon / 2^k$. Tällöin $A \subseteq G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ ja joukko G on avoin. Koska

$$G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \cap A^c) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \cap A_k^c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A_k,$$

niin monotonisuuden (m) ja subadditiivisuuden (s) nojalla on voimassa

$$m(G \setminus A) \overset{\text{(m)}}{\leq} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus A_k\right) \overset{\text{(s)}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

□

2. Olkoot A ja B sellaisia Lebesgue-mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoa, että $m(A \cap B) < \infty$. Osoita, että

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Ratkaisu. Hyödynnetään Carathéodoryn ehtoa ja joukkojen A ja B mitallisuutta.

i) Valitaan testijoukoksi $A \cup B$. Tällöin joukon B mitallisuuden nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &\overset{\text{Carathéodory}}{=} m((A \cup B) \cap B) + m((A \cup B) \setminus B) \\ &= m(B) + m(A \setminus B). \end{aligned}$$

ii) Valitaan testijoukoksi A. Tällöin joukon B mitallisuuden nojalla on voimassa

$$m(A) \overset{\text{Carathéodory}}{=} m(A \cap B) + m(A \setminus B).$$

Yhdistämällä kohtien i) ja ii) havainnot huomaamme, että

$$\begin{aligned} m(A \cup B) + m(A \cap B) &\overset{\text{i)}}{=} m(B) + m(A \setminus B) + m(A \cap B) \\ &\overset{\text{ii)}}{=} m(A) + m(B). \end{aligned}$$

Koska $m(A \cap B) < \infty$, niin voimme kirjoittaa edellisen muodossa

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

$\square$

3. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset [0,1]$ sellaisia mitallisia joukkoja, että jokainen piste $x \in [0,1]$ kuuluu ainakin kolmeen eri joukkoon A_k. Osoita, että $m(A_k) \geq 3/n$ jollakin k.

Ratkaisu. Määritellään funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f := \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}.$$

Koska joukot A_k ovat mitallisia, niin karakteristiset funktiot χ_{A_k} ovat mitallisia ja siten funktio f on mitallinen. Oletuksen nojalla nyt $f(x) \geq 3$ jokaisella $x \in [0,1]$, joten

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 3\,dx = 3.$$

Toisaalta

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \chi_{A_k}(x)\,dx \overset{A_k \subseteq [0,1]}{=} \sum_{k=1}^{n} m(A_k),$$

joten

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geq 3,$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

4. Osoita,että toinen seuraavista väitteistä on oikein ja toinen väärin:

(a) Jos f on integroituva funktio joukossa $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| < 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva A:ssa.

(b) Jos f on integroituva funktio joukossa $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| > 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva B:ssä.

Ratkaisu. (a) Väite pitää paikkansa. Olkoon f integroituva funktio joukossa A. Merkitään

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= \{x \in A \colon |f(x)| \geq 1\}, \\
A_2 &:= \{x \in A \colon |f(x)| < 1\},
\end{aligned}
$$

jolloin $A = A_1 \cup A_2$ ja $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Joukot A_1 ja A_2 ovat mitallisia esimerkiksi kurssimateriaalin Lauseiden 2.11 ja 2.12 nojalla. Nyt siis

$$
\begin{aligned}
\int_A |f(x)|^{1/2}\, dx &= \int_{A_1} |f(x)|^{1/2}\, dx + \int_{A_2} |f(x)|^{1/2}\, dx \\
&\leq \int_{A_1} |f(x)|\, dx + \int_{A_2} 1\, dx \\
&\leq \underbrace{\int_A |f(x)|\, dx}_{=:I} + m(A_2).
\end{aligned}
$$

Integraali I on äärellinen, koska funktio f on integroituva. Puolestaan koska $A_2 \subseteq A$, niin $m(A_2) \leq m(A) = 2$. Siten $\int_A |f|^{1/2} < \infty$, joten funktio $|f|^{1/2}$ on integroituva joukossa A.

(b) Väite ei pidä paikkaansa. Tarkastellaan funktiota $f \colon B \to \mathbb{R}$,

$$
f(x) = \frac{1}{x^2}.
$$

Nyt

$$
\int_B f(x)\, dx = 2 \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 2 \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = 2,
$$

joten funktio f on integroituva joukossa B, mutta

$$
\int_B |f(x)|^{1/2}\, dx = 2 \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = 2 \lim_{a \to \infty} [\ln x]_1^a = \infty,
$$

joten funktio $|f|^{1/2}$ ei ole integroituva joukossa B.

$\square$

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx.$$

[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

Ratkaisu. Käytetään dominoidun konvergenssin lausetta (DKL). Huomataan aluksi, että

$$\int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx = \int_1^\infty x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k) \chi_{[1,k]}(x)\, dx$$

jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Määritellään funktiot $f_k \colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f_k(x) = x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k) \chi_{[1,k]}(x).$$

Funktiot f_k ovat jatkuvien $(x \mapsto x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k))$ ja mitallisten $(x \mapsto \chi_{[1,k]}(x))$ funktioiden tuloina mitallisia. Kosinin ja eksponenttifunktion jatkuvuuden perusteella jokaisella $x \in [1,\infty)$ pätee

$$f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} \frac{e^0 \cos(0)}{x^2} = \frac{1}{x^2},$$

ja lisäksi jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in [1,\infty)$ pätee

$$|f_k(x)| \le x^{-2} e^{x/k} \chi_{[1,k]}(x) \le x^{-2} e \chi_{[1,k]}(x) \le \frac{e}{x^2}.$$

Koska funktio $g \colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = e/x^2$, on integroituva, niin dominoidun konvergenssin lauseen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_1^\infty f_k(x)\, dx \\
&\overset{\text{DKL}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□