Mitta ja integraali, kevät 2014
22.3.2012 järjestetyn erilliskokeen kysymykset

---

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$, että $A \subset G$ ja $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

2. Olkoot A ja B sellaisia Lebesgue-mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoa, että $m(A \cap B) < \infty$. Osoita, että

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

3. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset [0, 1]$ sellaisia mitallisia joukkoja, että jokainen piste $x \in [0, 1]$ kuuluu ainakin kolmeen eri joukkoon A_k. Osoita, että $m(A_k) \geq 3/n$ jollakin k.

4. Osoita,että toinen seuraavista väitteistä on oikein ja toinen väärin:

   (a) Jos f on integroituva funktio joukossa $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| < 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva A:ssa.

   (b) Jos f on integroituva funktio joukossa $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| > 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva B:ssä.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k) \, dx.$$

[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]