Mitta ja integraali, kevät 2014
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

Esimerkkejä Carathéodoryn ehdon käytöstä ja soveltamisesta

Carathéodoryn ehto: joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos jokaisella joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Carathéodoryn ehdon soveltaminen on yksi kurssin ydinasioista! Soveltamisessa olennaista on huomata, että jos E on mitallinen, ehto on tosiaan voimassa aivan jokaisella joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukkoa A nimitetään tällaisessa yhteydessä testijoukoksi, ja sopivalla testijoukon valinnalla saadaan yleensä osoitettua paljon. Alla on ehdon käytöstä ja soveltamisesta kaksi esimerkkiä.

1. *Tehtävä vanhasta loppukokeesta (12.8.2010).* Olkoot A ja B Lebesgue-mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja siten, että $A \subset B$ ja $m(A) < \infty$. Osoita, että

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

Ratkaisu. Hyödynnetään Carathéodoryn ehtoa ja joukkojen A ja B mitallisuutta. Koska A ja B ovat mitallisia, niin myös A^c ja $B \cap A^c$ ovat mitallisia. Valitaan testijoukoksi B:

$$\begin{aligned} m(B) &\overset{\text{Carathéodory}}{=} m(B \cap A) + m(B \setminus A) \\ &\overset{A \subseteq B}{=} m(A) + m(B \setminus A). \end{aligned}$$

Koska $m(A) < \infty$, niin voimme kirjoittaa edellisen muodossa

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

$\square$

2. *Tehtävä vanhasta loppukokeesta (9.3.2010).* Osoita: Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset mitalliset joukot A ja B, että $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

Ratkaisu. Oletetaan, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen. Tällöin $E \subset E \subset E$ ja $m(E \setminus E) = m(\emptyset) = 0 < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Siis voimme valita $A = B = E$.

Oletetaan sitten väitteen toinen puoli ja osoitetaan, että Carathéodoryn ehto on tällöin voimassa joukolle E. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja A ja B sellaiset mitalliset joukot, joille $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$. Nyt jokaiselle joukolle C on voimassa

$$\begin{aligned} C \cap E &\subset C \cap B \\ &= (C \cap (B \setminus A)) \cup (C \cap A), \end{aligned}$$

joten monotonisuuden (m) ja subadditiivisuuden (s) nojalla on voimassa

$$
\begin{aligned}
m^*(C \cap E) &\overset{\text{(m)}}{\leq} m^*((C \cap (B \setminus A)) \cup (C \cap A)) \\
&\overset{\text{(s)}}{\leq} m^*(C \cap (B \setminus A)) + m^*(C \cap A) \\
&\overset{\text{(m)}}{\leq} m^*(B \setminus A) + m^*(C \cap A) \\
&\leq m^*(C \cap A) + \varepsilon. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Toisaalta koska $A \subset E$, niin $C \setminus E \subset C \setminus A$, niin monotonisuuden nojalla on voimassa

$$m^*(C \setminus E) \leq m^*(C \setminus A). \qquad (2)$$

Yhdistämällä edelliset havainnot huomaamme, että

$$
\begin{aligned}
m^*(C \cap E) + m^*(C \setminus E) &\overset{(1)}{\leq} m^*(C \cap A) + \varepsilon + m^*(C \setminus A) \\
&\overset{(2)}{\leq} m^*(C \cap A) + m^*(C \setminus A) + \varepsilon \\
&\overset{\text{Carathéodory}}{=} m^*(C) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Luvun $\varepsilon > 0$ mielivaltaisuuden nojalla on siis voimassa $m^*(C) \geq m^*(C \cap E) + m^*(C \setminus E)$ kaikilla joukoilla $C \subset \mathbb{R}^n$, joten erityisesti Carathéodoryn ehto on voimassa joukolle E ja joukko E on siten mitallinen[1].

$\square$

[1] Katso kurssimateriaalin Huomautus 1.20.