Mitta ja integraali, kevät 2014
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Esimerkkejä Lebesguen ulkomitan ominaisuuksien[1] soveltamisesta

---

Lebesguen ulkomitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden avulla saadaan joissakin tilanteissa osoitettua helposti jokin joukko 0-mittaiseksi (ja siten myös mitalliseksi).

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ 0-mittainen joukko ja $B \subset A$. Osoita, että B on mitallinen ja $m_n^*(B) = 0$.

   Ratkaisu. Ulkomitan monotonisuuden nojalla on voimassa

   $$0 \le m_n^*(B) \le m_n^*(A) = 0 \implies m_n^*(B) = 0,$$

   joten Lauseen 1.22 nojalla joukko B on mitallinen. $\square$

2. *Tehtävä vanhasta loppukokeesta (4.3.2008).* Olkoon G tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko

   $$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}.$$

   Määritä $m_2^*(G)$.

   Ratkaisu. Huomataan heti, että

   $$G = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}.$$

   Tämän lisäksi jokaisella $x_0 \in \mathbb{R}$ ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on voimassa

   $$\{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left]x_0 - \frac{\varepsilon}{k2^{k+2}}, x_0 + \frac{\varepsilon}{k2^{k+2}}\right[\times]-k,k[,$$

   joten kokoelma $\mathcal{F}_\varepsilon := \{]x_0 - \varepsilon/(k2^{k+2}), x_0 + \varepsilon/(k2^{k+2})[\times]-k,k[\,:\, k \in \mathbb{N}\}$ muodostaa joukon $\{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ Lebesguen peitteen. Koska

   $$m_2^*(\{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}) \le S(\mathcal{F}_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{k2^{k+1}} 2k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

   niin luvun ε mielivaltaisuuden nojalla $m_2^*(\{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}) = 0$. Siten Lebesguen ulkomitan subadditiivisuuden ja joukon $\mathbb{Q}$ numeroituvuuden[2] nojalla on voimassa

   $$m_2^*(G) = m_2^*\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}\right) \le \sum_{x \in \mathbb{Q}} \underbrace{m_2^*(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\})}_{=0} = 0.$$

   $\square$

[1] Kurssimateriaalin Lause 1.6.
[2] Kurssimateriaalin Seuraus 0.17.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Olkoon $G_f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ funktion f kuvaaja. Osoita, että $m_2^*(G) = 0$.

Ratkaisu. Harjoitustehtävien 1 tehtävässä 6 osoitettiin, että mille tahansa jatkuvalle funktiolle $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on voimassa $m_2^*(G_g) = 0$. Tuo todistus[3] yleistyy helposti mille tahansa jatkuvalle funktiolle $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Merkitään nyt $f_k = f_{|[-k,k]}$. Nyt f_k on jatkuvan kuvauksen rajoittumana jatkuva, joten $m_2^*(G_{f_k}) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Siten

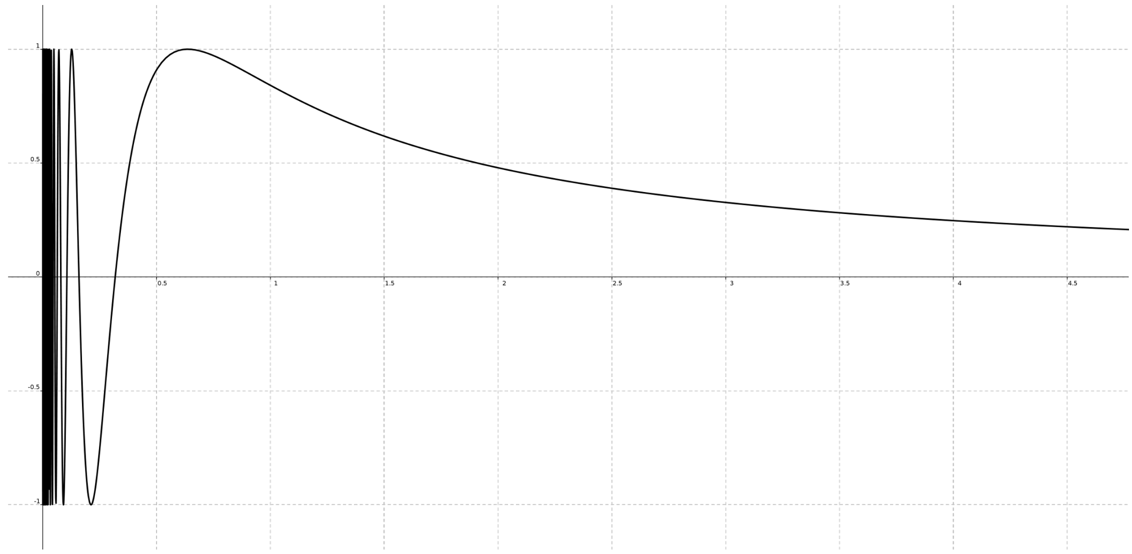
$$m_2^*(G_f) = m_2^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_{f_k}\right) \overset{\text{subadditiivisuus}}{\leq} \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{m_2^*(G_{f_k})}_{=0} = 0,$$

joten $m_2^*(G_f) = 0$. $\square$

Huomautus. Edellinen tulos yleistyy subadditiivisuuden avulla vastaavasti myös avoimilla (ja puoliavoimilla) väleillä jatkuville funktioille: esimerkiksi väli $(0,1)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$(0,1) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right],$$

jolloin voimme toimia kuten edellisessä todistuksessa.



Kuva 1: Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$, kuvaaja on 0-mittaisena joukkona mitallinen.

---

[3] Katso Harjoitustehtävien 1 ratkaisuehdotukset (ne lisätään kurssisivuille perjantaina 24.1.2014).