Mitta ja integraali, kevät 2014
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Esitiedot, vaikeustaso ja kurssin suorittaminen

I Mitta ja integraali on useille opiskelijoille vaikein aineopintojen kurssi. Jotkut kurssin suorittaneet tai sen suorittamista yrittäneet opiskelijat kuitenkin saattavat liioittelevat tuota vaikeustasoa seuraavista syistä:

- opiskelijan esitiedot olivat puutteelliset (katso kohta 3);
- opiskelija ei tehnyt kurssin aikana riittävästi töitä; tai
- molemmat edellisistä.

II Kurssi voi kyllä osoittautua työlääksi, mutta vaivannäkö tämän kurssin yhteydessä kannattaa: kurssilla tulee eteen monia uusia käsitteitä ja niihin liittyviä uusia todistustekniikoita, ja niiden kanssa ei opi toimimaan ilman totuttelua ja treenaamista.

III Kurssin esitietovaatimuksina on listattu kurssit Analyysi I, Analyysi II, Vektorianalyysi ja Topologia I. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että seuraavien asioiden (ainakin jonkinasteinen) hallitseminen on tärkeää:

- joukko-opin perusteet: alkio, joukko, osajoukko, yhdiste, leikkaus, erotus, komplementti, karteesinen tulo, potenssijoukko ja indeksijoukko;
- äärettömät yhdisteet ja leikkaukset;
- de Morganin lait;
- induktio;
- avoin ja suljettu joukko;
- jonot ja raja-arvot;
- summat, sarjat ja sarjojen suppeneminen; geometrinen sarja;
- infimum, supremum ja niiden määrittäminen käytännössä;
- euklidinen normi ja euklidinen metriikka;
- jatkuva kuvaus ja jatkuvuuden karakterisointi avointen ja suljettujen joukkojen avulla[1];
- Riemann-integraali.

Kurssi on mahdollista suorittaa menestyksekkäästi käymättä kurssia Vektorianalyysi, mutta kyseisen kurssin asioiden osaaminen voi auttaa hahmottamaan joitakin asioita paremmin. Sen tuloksia tarvitaan kuitenkin tällä kurssilla vain vähän.

---

[1] Jussi Väisälä: Topologia I, lauseet 4.8 ja 6.13.

IV Kurssilla käytetään toistuvasti esimerkiksi seuraavia päättelyitä:

- jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on voimassa $a \le b + \varepsilon$, niin $a \le b$;
- jos $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$ ja $a \in A$, niin $a \ge \inf A$ ja $a \le \sup A$;
- jos jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \ge M_1$ ja $a \le M_2$, niin $\inf A \ge M_1$ ja $\sup A \le M_2$;
- jos $a \le b$ ja $b \le a$, niin $a = b$.

Jos mikään edellisistä kohdista tuntuu hämmentävältä tai oudolta, selvitä asia itsellesi! Muussa tapauksessa suuri osa kurssin todistuksista tulee olemaan samalla tavalla hämmentäviä tai outoja.

V On tavattoman tärkeää pitää mielessä, että kurssilla esitettävät todistukset ja laskuharjoitusten ratkaisuehdotukset ovat vain siistejä esityksiä siitä pohdinnasta, joka on tapahtunut ennen todistuksen kirjoittamista. Todistuksia pystyy kirjoittamaan suoraan paperille vain harvoin, yleensä väliin vaaditaan kokeilemista, arvauksia, erehdyksiä ja kasa suttupapereita. Jos tehtävä ei tunnu ratkeavan, joskus auttaa pitää tauko yrittämisestä ja palata tehtävän pariin myöhemmin.

VI Kurssin luennot seuraavat yleensä hyvin uskollisesti kurssimateriaalia Ilkka Holopainen: Mitta ja integraali. Monet materiaalin todistuksista on melko pelkistettyjä, joten kannattaa pitää luennoilla materiaalia mukanaan ja täydentää sitä itse marginaaleihin ja väleihin luennoitsijan kommenttien ja taulumerkintöjen perusteella.

VII Ensimmäisten laskuharjoitusten ylivoimaisesti tärkein asia on Lebesguen ulkomitta. Se on eräs kurssin ydinasioista, ja siitä on usein kysytty myös kokeessa. Esimerkiksi 4.3.2008 järjestetyn loppukokeen ensimmäinen tehtävä oli seuraava:

> Olkoon G tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko
>
> $$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}.$$
>
> Määritä $m_2^*(G)$.