Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, kevät 2014

Dario Gasbarra[1]

27. tammikuuta 2014

[1]Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

My Thesis, paradoxically and a little provocatively, but nonetheless genuinely, is simply this:

PROBABILITY DOES' NOT EXISTS.

The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston , the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, . . . , or Faires and Witches was an essential step along the road on scientific thinking. Probability too, if regarded as something endowed with some kind of objective existence is no less a misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilitic beliefs.

Bruno De Finetti, Theory of Probability (1974).

Sisältö

Todennäköisyys = Hinta Bruno De Finetti (1906-1985) oli matematiikko, taloustietelijä ja filosofi. Hänen tieteenfilosofiassa torjutaan absoluttisen todennäköisyyden käsite. Sen sijaan todennäköisyydellä on puhtaasti operaativinen merkitys. Todennäköisyydet ovat aina suhteellisia, meidän tiedon tilasta riippuen.

Epävarmassa maailmassa, tapahtumat voidaan luokitella kahteen luokkaan, $\mathcal{V} = \{$ *varmat tapahtumat* $\}$ ja $\mathcal{E} = \{$ *epävarmat tapahtumat* $\}$.

Kun tapahtuma $E \in \mathcal{V}$ on varma ja $F \supseteq E$ eli F tapahtuu aina silloin kun E tapahtuu, seuraa että myös $F \in \mathcal{V}$ on varma. Tapahtuma E on mahdoton jos sen komplemnetti tai negaatio E^c (joka tapahtuu silloin kun E ei tapahdu) on varma.

Merkitään luokka $\mathcal{N} = \{$ *mahdottomat tapahtumat* $\}$ ja sanotaan että tapahtumat E, F ovat keskenään *ei sopivia* kun niiden yhteensattuma on mahdoton, eli $(E \cap F) \in \mathcal{N}$. Huomataan myös että jokaiselle tapahtumalle E, $(E \cup E^c) \in \mathcal{V}$. Kun E ja F ovat tapahtumia, $(E \cup F)$ merkitsee tapahtuman jossa E tai F tapahtuvat.

Eräs vedonlyöntimeklari ottaa vastaan vetoja tapahtumista $E_1, \dots, E_n$, jotka ovat keskenään ei-sopivia, siis $(E_i \cap E_j) \in \mathcal{N}$ (mahdoton tapahtuma) kun $i \neq j$. Tarkemmin, meklarin on pakko ottaa vastaan mitä tahansa vetoja (myös negatiivisilla panoksilla) tapahtumista E_i, $i = 1, \dots, n$, ja niiden yhdisteistä $(E_i \cup E_j), (E_i \cup E_j \cup E_k), \dots$ jne.

Meklari valitsee kuitenkin vetojen hinnat (tulkinta: **todennäköisyydet**) $Pr(E_i), Pr(E_i \cup E_j), Pr(E_i \cup E_j \cup E_k) \dots$ jne.

Merkinnät: $p_i := Pr(E_i)$, ja "satunnaissuure" $\mathbf{1}_{E_i}$ on tapahtuman E_i:n indikaattori joka saa arvon 1 jos "sattuma" E_i tapahtuu, muuten 0.

Pr lyhennys sopii hyvin molemmille englanninkielisille sanoille

Price = hinta ja **Pr**obability = todennäköisyys.

Vastapuolen voitto on satunnaissuure

$$V = (\mathbf{1}_{E_1} - p_1)y_1 + \cdots + (\mathbf{1}_{E_1} - p_n)y_n$$

jossa $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on vastapuolen vapaasti valittavissa oleva vedonlyöntistrategia.

Jos meklari on johdonmukainen, hän määrää vedonlyönnin hinnat siten että vastapuolelle ei syntyisi *arbitraasimahdollisuuksia* , eli tilaisuuksia joissa voi tehdä riskitönta voittoa.

Teoreema 0.0.1. *(Tämä on väite eikä määritelmä !)*

Arbitraasivapausoletuksesta seuraa välittömästi:

1. *Vetojen hinnat ovat yksikäsitteisiä (yhden hinnan laki), vedolle* $\mathbf{1}_{E_i}$ *on vain yksi hinta* $Pr(E_i) \in [0,1]$.

2. *Jos* $E_i \in \mathcal{V}$ *(varma tapahtuma),* $Pr(E_i) = 1$ *ja vastaavasti jos* $E_i \in \mathcal{N}$ *(mahdoton tapahtuma), niin* $Pr(E_i) = 0$.

3. *Hinnat (eli todennäköisyydet) ovat (äärellisesti)-additiivisia.*

Todistus :

1. Jos vedolle $\mathbf{1}_E$ olisi kaksi hintaa, $p_1 > p_2$, vastapuoli voisi ostaa meklatilta x vedonlyöntilippua hinnalla p_1 ja myydä meklarille x vedonlyöntilippua hinnalla p_2, jossa $x > 0$ voi olla mielivaltainen suuri. Vastapuolen voitto (meklarin tappio) on kaikissa tapauksissa

$$(\mathbf{1}_E - p_1)x - (\mathbf{1}_E - p_2)x = (p_1 - p_2)x$$

2. Jos E on varma tapahtuma, ja vedolle $\mathbf{1}_E$ on hinta $p \neq 1$, vastapuolelle syntyy varmasti voitto

$$(\mathbf{1}_E - p)x = (1-p)x$$

Kun $p > 1$ (vastaavasti $p < 1$) vastapuoli saa mielivaltainen suuri voittoa valitsemalla $x < 0$ (vastaavasti $p > 1$). Jos E on mahdoton tapahtuma, vastapuolen voitto on varmasti

$$(\mathbf{1}_E - p)x = -px$$

jossa $x < 0$ on mielivaltainen.

3. Olkoon ensin $n = 2$, $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$,

sen lisäksi oletamme että $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{V}$ (eli on varma tapahtuma). Siitä seuraa $Pr(E_1 \cup E_2) = 1$. Lineaarisella systeemillä

$$\begin{cases} V(E_1) = (1-p_1)y_1 - p_2 y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_1 \text{ tapahtuu} \\ V(E_2) = -p_1 y_1 + (1-p_2) y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_2 \text{ tapahtuu} \end{cases}$$

on ratkaisu mille tahansa voitto-vektorille $(V(E_1), V(E_2))$ jos ja vain jos kertoimien matriisi on kääntyvä, eli

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 \\ -p_1 & (1-p_2) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 \neq 0$$

Estääkseen vastapuolta tekemistä riskitöntä voittoa, on välttämätöntä että

$$Pr(E_1) + Pr(E_2) = 1 = Pr(E_1 \cup E_2).$$

Kun $n > 2$, $E_i \cap E_j \in \mathcal{N}$ kun $i \neq j$ ja, $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{V}$ (eli on varma), meklari on johdonmukainen jos ja vain jos

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_n = 0$$

Tämä determinantti lasketaan induktiolla tai lineaari-algebran Sylvesterin lemman kautta:

Lemma 0.0.1. *Jos A on $n \times m$ ja B on $m \times n$ matriisi, ja I_n on $n \times n$ identiteetti matriisi,*

$$\det\Big(I_n + AB\Big) = \det\Big(I_m + BA\Big)$$

Yleisemmin, kun $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$, koska $\big(E_1 \cup E_2 \cup (E_1 \cup E_2)^c\big) \in \mathcal{V}$, seuraa

$$1 = Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr((E_1 \cup E_2)^c) = Pr(E_1) + Pr(E_2) + \big(1 - Pr(E_1 \cup E_2)\big)$$

siis $Pr(E_1 \cup E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2)$ $\square$

Oletetaan että meklari on hinnoitellut johdonmukaisesti keskenään eisopivia tapahtumia $E_1, \dots, E_n$ ja niiden yhdisteitä hinnoilla $Pr(E_1), \dots, Pr(E_n)$, jossa P on äärellisesti additiivinen.

Käsitellään vielä monimutkaisempaa vedonlyöntisopimusta (“satunnaissuuretta”)

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{1}_{E_x}$$

jossa

$$E_x := \bigcup_{1 \leq i \leq n : x_i = x} E_i = (\text{ “}X \text{ saa arvon } x\text{“ }).$$

ja $E_x = \emptyset$ jos $x \neq x_i$ $\forall i$.

Vedonlyönninsopimus X maksaa vastapuolelle etukäteen sovittua summaa $x_i \in \mathbb{R}$ silloin kun "sattuma" E_i tapahtuu.

Tämä sopimus on "toistettavissa" vedonlyönnin strategialla $(x_1, \dots, x_n)$.

Koska arbitraasivapaassa hinnoittelusysteemissä hinnat ovat yksikäsitteisiä , seuraa että X:n ainoa johdonmukainen hinta (tulkinta: satunnaissuureen **odotusarvo**, englanniksi Expectation) on

$$\mathbb{E}_{Pr}(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i Pr(E_i) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(E_x) \, .$$

- Odotusarvo on lineaarinen: kun a, b ovat vakioita ja X, Y satunnaisia,

$$E_{Pr}(aX + bY) = aE_{Pr}(X) + bE_{Pr}(Y)$$

- Odotusarvo on positiivinen: jos $(X \geq 0)$ on varma tapahtuma Pr todennäköisyyden suhteen, eli $Pr(X \geq 0) = 1$, seuraa

$$E_{Pr}(X) \geq 0$$

Huomautus 0.0.1. *Olkoon*

$$\mathcal{X} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}(E_i) \ : n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

vedonlyönninsopimusten osajoukko.

Matemaattisessa rahoitusteoriassa, karakterisoidaan arbitraasivapaita hintasysteemejä

$$c = (c(X) : X \in \mathcal{X})$$

Lause 0.0.1. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause) Hintasysteemi $c(\cdot)$ on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa hinnoittelu-todennäköisyys Pr, jolla $Pr(E) = 0 \iff E \in \mathcal{N}$, ja kaikille $X \in \mathcal{X}$*

$$c(X) = \mathbb{E}_{Pr}(X) = \sum_{x} x Pr(X = x).$$

Yleisesti silloin kun on olemassa hinnoiteilu-todennäköiosyys Pr ei tarvitse olla yksikäsitteinen, voi olla useita hinnoittelutodennäköisyyksia jotka generoivat samaa hintasysteemia $c(\cdot)$.

Todistus *($\Longleftarrow$): Olkoon $X_1, \ldots, X_m$ satunnaisuureita ja Pr hinnoittelu-todennäköisyys, joka määrä hintasysteemiä*

$$c_k = E_{Pr}(X_k) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(X_k = x), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Tässä oletamme että $\{\, x : Pr(X_k = x) > 0\}$ on äärellinen, $\forall k = 1, \ldots, m$.

Olkoon $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ vedonlyönti strategia jolla tapahtuma

$$\left\{ \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \geq 0 \right\} \in \mathcal{V}$$

on varma. Toisaalta, odotusarvon lineaarisuudesta, koska $c_k = E_{Pr}\big(X_k\big)$,

$$E_{Pr}\left(\sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \right) = \sum_{k=1}^m y_k \Bigg(E_{Pr}\big(X_k\big) - c_k \Bigg) = 0 \ .$$

Tästä seuraa että tapahtuma

$$\left\{ \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) > 0 \right\} \in \mathcal{N}$$

on mahdoton, koska muuten

$$Pr\left(\sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) > 0 \right) > 0$$

josta seuraa ristiriita

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^m \Bigg(E_{Pr}(X_k) - c_k \Bigg) = E_{Pr}\left(\sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \right) \\ &= E_{Pr}\left(\left(\sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) \right) \mathbf{1}\left\{ \sum_{k=1}^m y_k (X_k - c_k) > 0 \right\} \right) > 0. \end{aligned}$$

Implikaatio ($\Longrightarrow$) osoitetaan kohta konveksianalyysin argumentilla $\square$

Arbitraasi-vapaassa tilanteessa, hinnoittelu-todennäköisyyden Pr:n avulla, määrittelemällä

$$c(Y) = \mathbb{E}_{Pr}(Y) = \sum_i y_i Pr(E_i)$$

laajennetaan alkuperäistä hintasysteemiä säilyttämällä arbitraasivapautta.

Kun on olemassa, hinnoittelutodennäköisyys Pr ei tarvitse olla yksikäsitteinen, siis jos hinta-systeemi $(c(X) : X \in \mathcal{X})$ on arbitraasi-vapaa, sillä voi olla useita arbitraasi-vapaita laajennuksia.

Huomautus 0.0.2. *Tässä johdannossa emme ole vielä paljastaneet että Kolmogorovin todennäköisyyden aksioomeissa tapahtumat E_i tulevat olemaan jonkun pistetapahtumien avaruuden Ω:n osajoukkoja. Sen sijaan De Finetti kannatti minimaalista lähestymistapaa, jossa pistetapahtumien avaruutta Ω ei edes tarvita.*

Tehtävä 0.0.1. *Arbitraasi-vapaassa tilanteessa, silloin kun*

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \in \mathcal{V} \text{ on varma tapahtuma, ja kun } \ell \neq k \ \big(E_k \cap E_\ell\big) \in \mathcal{N} \text{ on mahdoton },$$

osoita

$$Pr(E_1) + Pr(E_2) + \cdots + Pr(E_n) = 1$$

Sylvesterin lemman avulla:
Kun A ja B ovat $n \times m$ ja vastaavasti $m \times n$-matriiseja,
$\det(Id_n + AB) = \det(Id_m + BA)$

Arbitraasi-vapaus ja hintasysteemi

Määritelmä 0.0.1. *Olkoon V vektoriavaruus (esimerkiksi $V = \mathbb{R}^d$).*
Joukko $\mathcal{C} \subseteq V$ on konveksi jos ja vain jos

$$x, y \in \mathcal{C},\ 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \in \mathcal{C}.$$

Tarkastellaan yksinkertäinen markkinamalli, kahdella ajanhetkellä $t \in \{\ 0, 1 = T\}$, jossa $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ on äärellinen joukko maailmantiloja. Osakken arvo hetkellä $t = 0$ on $S_0(\omega) = \pi(S)$ deterministinen, ja osakkeen arvo hetkellä $t = 1$ on ω:sta riippuen $S_1(\omega) \geq 0$ €.

Voidaan olettaa että $\forall i$, pistetapahtumat $\{\ \omega_i\}$ ovat mahdollisia.

Koska on kyse sijoitukseista, oletetetaan myös että $S_1(\omega) \geq 0\ \forall \omega \in \Omega$. Sijoitus voi menettää kokonaan arvonsa mutta ei saa olla koskaan negatiivinen.

Määritelmä 0.0.2. $\pi(S)$ *on arbitraasi hinta yhdelle osakkeelle S jos ja vain jos*

$$P(S_1 \geq \pi(S)) = 1 \text{ ja } P(S_1 > \pi(S)) > 0 \text{ vai } P(S_1 \leq \pi(S)) = 1 \text{ ja } P(S_1 < \pi(S)) > 0$$

Näytämme että jos näin ei tapahdu, on olemassa arbitraasi-vapaa hinnoittelu systeemi Pr kaikille Ω:n tapahtumille, jolla $Pr(\omega_i) > 0\ \forall i$ ja $\pi(S) = E_{Pr}(S)$.

Olkoon $\mathcal{Q}$ todennäköisyysvektoreiden avoin alijoukko

$$\mathcal{Q} = \{Q : Q(\omega_i) > 0 \;\forall i = 1, \dots, n \;\text{ ja }\; \sum_{i=1}^{n} Q(\omega_i) = 1\}, \text{ ja vastaavat hinnat}$$

$$\mathcal{C} = \Big\{ E_Q(S_1) = \sum_{i=1}^{n} S_1(\omega_i) Q(\omega_i) : Q \in \mathcal{Q} \Big\}$$

Väite on osoitettu kun näytämme että $\pi(S) \in \mathcal{C}$.
Koska malli on arbitraasi vapaa on olemassa

$$\omega_1 \neq \omega_2 \text{ jolla } a = S_1(\omega_1) - \pi(S) < 0 \text{ ja } \omega_2 \text{ jolla } b = S_1(\omega_2) - \pi(S) > 0,$$

ja koska $\mathcal{C}$ on konveksi, seuraa (harjoitustehtävä !) että

$$\mathcal{C} \supseteq (a + \pi(S), b + \pi(S)) \ni \pi(S) \;.$$

Vihje Olkoon $\widehat{Q}(\omega_1) = \frac{b}{b-a}$, $\widehat{Q}(\omega_2) = -\frac{a}{b-a}$, ja $\widehat{Q}(\omega_j) = 0$ kun $j \neq 1, 2$. Seuraa

$$E_{\widehat{Q}}(S_1) = \sum_{i=1}^{n} S_1(\omega_i)\widehat{Q}(\omega_i) = S_1(\omega_1)\widehat{Q}(\omega_1) + S_1(\omega_2)\widehat{Q}(\omega_2) =$$
$$a\left(\frac{b}{b-a}\right) - b\left(\frac{a}{b-a}\right) = 0$$

jossa $\widehat{Q} \in \overline{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{Q}$ koska $\widehat{Q}(\omega_i) = 0$ kun $\omega_i \notin \{1, 2\}$.

Osoitetaan sitten (harjoitustehtävä) että on olemassa jono $Q^{(n)} \in \mathcal{Q}$ jolla kun $n \to \infty$

$$Q^{(n)}(\omega_i) > 0 \text{ ja } Q^{(n)}(\omega_i) \to \widehat{Q}(\omega_i), \;\forall i = 1, \dots, n$$

ja $E_{Q^{(n)}}(S_1) \to E_{\widehat{Q}}(S_1) = 0$.

Huomautus Kun kaikkien mahdottomien tapahtumien joukko on kiinnitetty, sen jälkeen satunnaisuudella ei ole enää minkäläistä roolia: todennäköisyydet ovat johdonmukaisia hintasysteemeja ja jokaisella mahdollisella tapahtumalla tule olemaan aidosti positiivisia hintoja. Johdonmukaisia hintasysteemeja voi olla useita.

Seuraavaksi käsittelemme markkinamallia jossa on useita osakkeita, ja siihen tarvitaan konveksianalyysin työkaluja.

Erottavan hypertason lause $\mathbb{R}^d$:ssa.

Lemma 0.0.2. *(Föllmer ja Shiedin kirjasta, Proposition A.1)*
Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ konveksi joukko jolla $0 \notin \mathcal{C}$. On olemassa $\rho \in \mathbb{R}^d$ jolla

$$(x, \rho) := x \cdot \rho := \sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

ja on olemassa $x_0 \in \mathcal{C}$ jolla $x_0 \cdot \rho > 0$.
Sen lisääksi jos $0 \notin \overline{\mathcal{C}}$, seuraa että on olemassa $\rho \in \mathbb{R}^d$ jolla $x \cdot \rho > 0$ $\forall x \in \mathcal{C}$.

Geometrinen tulkinta: on olemassa erottava hypertaso

$$H = \left\{ z :\in \mathbb{R}^d : z \cdot \rho = 0 \right\}$$

joka sijoituu konveksijoukon $\mathcal{C}$ ja pisteen 0:n välissä.
Tod. Merkitään $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ (eukliidinen normi), ja $\overline{\mathcal{C}}$ on joukon $\mathcal{C}$:n sulkema.
Huomataan että

$$0 \notin \overline{\mathcal{C}} \Longleftrightarrow \inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0 \Longleftrightarrow \inf_{x \in \overline{\mathcal{C}}} |x| > 0,$$

ja siinä tapauksessä on olemassa $y \in \overline{\mathcal{C}}$ jolla $|y| = \inf_{x \in C} |x| > 0$. Koska konveksi joukon sulkeuma $\overline{\mathcal{C}}$ on konveksi (harjoitustehtävä), seuraa $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}
&|(x-y)\alpha + y|^2 \geq |y|^2 > 0 \\
&\Longleftrightarrow (x-y, x-y)\alpha^2 + (y,y) + 2\alpha(x-y, y) \geq (y,y) > 0 \\
&\Longleftrightarrow (x-y, x-y)\alpha \geq 2(y-x, y)
\end{aligned}$$

kun $\alpha \downarrow 0$, seuraa $(x, y) \geq (y, y) > 0$, siis voidaan ottaa $\rho = y$.
Käsitellään nyt tapausta jolloin $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| = 0$. Voidaan olettaa että C joukon virittämä lineaarinen aliavaruus on koko $\mathbb{R}^d$, eli

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : m \in \mathbb{N},\ \lambda_k \in \mathbb{R}, x_k \in C \right\} = \mathbb{R}^d$$

muuten jatkamme todistusta aliavaruudessa $L \simeq \mathbb{R}^\ell$ jollakin $\ell < d$.
Osoitan että kun $\mathcal{C}$ on konveksi ja $0 \notin \mathcal{C}$, siitä seuraa että $\overline{\mathcal{C}} \subsetneq \mathbb{R}^d$.

Olkoon $\{e_1, \ldots, e_d\} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathbb{R}^d$:n kanta, jossa e_i eivät ole välttämättä ortogonaalisia mutta virittävät $\mathbb{R}^d$. Näytämme että

$$\xi := -\sum_{i=1}^{d} e_i \notin \overline{\mathcal{C}}$$

Muuten olisi olemassa jono $(\xi^{(n)} : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{C}$

$$\xi^{(n)} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{(n)}\, e_i \to \xi \text{ kun } n \to \infty \ , \quad \iff \quad \lambda_i^{(n)} \to -1 \ i = 1, \ldots, d.$$

Kun n on tarpeeksi suuri $\lambda_i^{(n)} < 0 \ \forall i = 1, \ldots, d$. Tästä seuraa

$$0 = \left(\frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^{(n)}}\, \xi^{(n)} + \sum_{i=1}^{d} \frac{-\lambda_i^{(n)}}{1 - \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^{(n)}}\, e_i \right) \in \mathcal{C},$$

jossa 0 on konveksi kombinaatio vektoreista $\xi^{(n)}, e_1, \ldots, e_d \in \mathcal{C}$, joka on konveksi joukko. Koska oletettiin $0 \in \mathcal{C}$, tästä seuraa $\xi \notin \overline{\mathcal{C}}$.

Koska $\overline{\mathcal{C}} \neq \mathbb{R}^d$, on olemassa jono $(\zeta_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ jolla $\forall n$

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} |x - \zeta_n| > 0$$

ja $\zeta_n \to 0 \notin \mathcal{C}$.

Jokaiselle n:lle joukko

$$\mathcal{C}_n = (\mathcal{C} - \zeta_n) := \left\{ \ x - \zeta_n : \zeta_n \in \mathcal{C} \right\}$$

on konveksi joka toteuttaa lemman ensimmäisen osan oletusta $\inf_{x \in \mathcal{C}_n} |x| > 0$. Siitä seuraa että on olemassa $\rho_n \in \mathbb{R}^d$, jolla

$$(\rho_n, x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}_n$$

Kertomalla positiiivisella skalaarilla voidaan olettaa että $\forall n$, $|\rho_n| = 1$.

Koska yksikkö-pallon pinta $\mathcal{S}^{d-1}$ on kompakti, Heine-Borelin lemmasta seuraa että on olemassa suppeneva alijono $\rho_{n_k} \to \rho$, jossa $|\rho| = 1$, ja $\forall x \in \mathcal{C}$

$$\rho \cdot x = \lim_{k \to \infty} \rho_{n_k} \cdot x = \lim_{k \to \infty} \rho_{n_k} \cdot (x - \zeta_{n_k}) \geq 0$$

koska $|\rho_{n_k}| < 1$ ja $|\zeta_{n_k}| \to 0$.

Koska $|\rho| = 1$ ja $L = \text{span}(\mathcal{C})$ on d-ulotteinen, ei voi olla $(x, \rho) = 0$ $\forall x \in \mathcal{C}$, muuten olisi $\mathcal{C} \subseteq \rho^{\perp}$ jossa hypertaso $\rho^{\perp}$ on $(d-1)$-ulotteinen. Siksi on olemassa $x_0 \in \mathcal{C}$ jolla $(\rho \cdot x_0) > 0$ □

Huomautus Erottavan hypertason lause yleistyy ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa Hahn-Banachin lauseeksi, palataan siihen myöhemmin.

Arbitraasi d-osakkeilla, äärellisessä tila-avaruudessa Olkoon edelleen $\Omega = \big\{ \omega_1, \ldots, \omega_n \big\}$, jossa kaikki piste tapahtumat ω_i ovat mahdollisia. Eli hinnoitteilu-todennäköisyydet Q tulevat toteuttamaan $Q(\omega_i) > 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Olkoon $(S_t(\omega) : t \in \{0, 1\}, \omega \in \Omega)$ osake-vektori

$$S_1(\omega) = (S_t^{(0)} = 1, S_t^{(1)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$$

jossa $t \in \{0, 1 = T\}$, ja

$$S_0(\omega) \equiv \pi = (\pi_0 = 1, \pi_1 \ldots, \pi_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1} \qquad \text{(hinta-vektori)}$$

Merkintä: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Tässä $S_t^{(0)} \equiv 1$ on riskitön nolla korkoinen pankkitilitalletus, josta voidaan myös lainata rahaa nolla korolla.

Sijoitus-strategia tai salkku (englanniksi: portfolio) kuvaa osakepainojen vektori $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Salkun arvo on

$$V_0 = \xi \cdot \pi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{d} \xi_i \pi_i \qquad \text{kun } t = 0$$

$$V_1(\omega) = \xi \cdot S_1(\omega) = \xi_0 + \sum_{i=1}^{d} \xi_i S_1^{(i)}(\omega) \qquad \text{kun } t = 1$$

Määritelmä 0.0.3. *1. ξ on arbitraasi salkku kun $V_0 = 0$,*

$$P\big(\xi \cdot V_1 \geq 0\big) = 1 \quad \text{ja} \quad P\big(\xi \cdot V_1 > 0\big) > 0$$

Kun Ω on korkeintaan numeroituva, tämä tarkoittaa että $\forall \omega \in \Omega$ jolla $P(\{\omega\}) > 0$ $\quad V_1(\omega) \geq 0$, ja on olemassa $\widehat{\omega} \in \Omega$ jolla $P(\widehat{\{\omega\}}) > 0$ jolla $V_1(\widehat{\omega}) = 0$.

2. Kun arbitraasi-salkkuja ei ole olemassa, sanotaan että markkimalli

$$\big(S^{(0)} = 1, S_1^{(1)}, \ldots, S_1^{(d)}; \pi_0 = 1, \pi_1, \ldots, \pi_d\big)$$

on arbitraasi-vapaa

Teoreema 0.0.2. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause, versio 1): Yllä määritelty markkinamalli on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa riskineutraali todennäköisyysvektori $Q = (Q(\omega_1), \ldots, Q(\omega_n))$ (eli vedonlyönti hintavektori tapahtumille $\{\omega_i\}$: $i = 1, \ldots, n$) jolla*

1. $Q(\omega_i) > 0, \forall i = 1, \ldots, n,$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} Q(\omega_i) = 1$

2. $E_Q(S^{(k)}) := \sum_{i=1}^n S_1^{(k)}(\omega_i)Q(\omega_i) = \pi_k, \quad k = 1, \dots, d$

Tod. ($\Longleftarrow$): Jos Q on riskineutraali todennäköisyysvektori, ja $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d)$ on salkku, jolla

$$V_0 = \xi \cdot \pi = \xi_0 + \sum_{k=1}^d \xi_k S_0^{(k)} = 0,$$

seuraa

$$E_Q(\xi \cdot (S_1 - \pi)) = \xi \cdot E_Q(S_1 - \pi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E_Q(\xi \cdot S_1) = 0$$

Silloin

$$\xi \cdot S_1(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \quad \Longrightarrow \quad \xi \cdot S_1(\omega) \equiv 0 \quad \forall \omega \quad \square$$

($\Longrightarrow$): Määritellään osakkeiden voittovektori

$$G(\omega) = (G^{(1)}(\omega), \dots, G^{(d)}(\omega)) = (S_1(\omega) - \pi) \in \mathbb{R}^d$$

Olkoon

$$\mathcal{Q} = \Big\{ Q = (Q(\omega_1), \dots, Q(\omega_n) : \quad \sum_{i=1}^n Q(\omega_i) = 1 \text{ ja } Q(\omega_i) > 0 \; \forall i \Big\} \subseteq [0,1]^n$$

$$\mathcal{C} = \Big\{ E_Q(G) : \; Q \in \mathcal{Q} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

Huomataan että joukot $\mathcal{Q}$ ja $\mathcal{C}$ ovat konvekseja ja avoimia.

Kun $\mathbf{0} \notin \mathcal{C}$, separoivan hypertason nojalla on olemassa erottava hypertaso $\xi \in \mathbb{R}^d$ jolla

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} \{ \xi \cdot x \} = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \xi \cdot E_Q(G) \} \geq 0,$$

ja on olemassa $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}$ jolla $\widehat{x} = E_{\widehat{Q}}(G) \in \mathcal{C}$ toteuttaa

$$\xi \cdot \widehat{x} = \xi \cdot E_{\widehat{Q}}(G) = \sum_{k=1}^d \sum_{\omega \in \Omega} \xi_k G^{(k)}(\omega) > 0$$

Tästä seuraa että on olemassa $\widehat{\omega}$ jolla

$$\sum_{k=1}^d \xi_k G^{(k)}(\widehat{\omega}) > 0$$

Osoitamme että

$$\sum_{k=1}^{d} \xi_k G^{(k)}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

Olkoon

$$A = \left\{ \omega : \sum_{k=1}^{d} \xi_k G^{(k)}(\omega) < 0 \right\}$$

Määritellään jono

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A^c}(\omega) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{1}_A(\omega) \quad n \in \mathbb{N}$$

jossa $A^c = \Omega \setminus A$. Saadaan

$$E_{\widehat{Q}}(Z_n) = \frac{1}{n}(1 - \widehat{Q}(A)) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \widehat{Q}(A)$$

ja määritellään todennäköisyysmittojen jono $\{Q_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{Q}$ mitan vaihto kaavalla

$$Q_n^*(\omega) = \frac{Z_n(\omega)}{E_{\widehat{Q}}(Z_n)} \widehat{Q}(\omega)$$

Nyt

$$E_{Q_n^*}\big(\xi \cdot G\big) = \frac{E_{\widehat{Q}}((\xi \cdot G) Z_n)}{E_{\widehat{Q}}(Z_n)} \geq 0$$

koska $Q_n^* \in \mathcal{Q}$, ja kun $n \to \infty$

$$Z_n(\omega) \longrightarrow \mathbf{1}(\omega \in A) \quad \forall \omega$$

josta seuraa kun $n \to \infty$

$$E_{Q_n^*}\big(\xi \cdot G\big) E_{\widehat{Q}}(Z_n) = E_{\widehat{Q}}\big((\xi \cdot G) Z_n\big) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi \cdot G(\omega)) Z^n(\omega) \widehat{Q}(\omega)$$
$$\longrightarrow \sum_{\omega \in \Omega} (\xi \cdot G(\omega)) \mathbf{1}_A(\omega) \widehat{Q}(\omega) = E_{\widehat{Q}}\big((\xi \cdot G(\omega)) \mathbf{1}_A\big) \geq 0$$

josta seuraa $\widehat{Q}\big(\xi \cdot G \geq 0\big) = 1$, ja koska $\widehat{Q}(\omega) > 0 \; \forall \omega \in \Omega$, seuraa

$$\xi \cdot G(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

Tästä seuraa että

$$\bar{\xi} = \left(\xi_0 := -\sum_{k=1}^{d} \xi_i S_0^{(k)}, \xi_1, \dots, \xi_d\right) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

on arbitraasisalkku □

Huomautus: Tämä todistus toimii myös yleisellä todennäköisyysavaruudella, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jossa odotusarvojen jonon konvergenssi seuraa Lebesguendominoidun konvergenssin lauseesta (palataan siihen myöhemmmin).

0.1 Numerääri

Tähän asti osakkeiden arvot esiteltiin euroina, ja implisiittisesti oletettiin seuraavaa:

On käytettävissä riskitön instrumentti $S_t^{(0)}$, jolla on hinta $1e$ hetkellä $t = 0$ ja samaa arvoa $1e$ hetkellä $t = 1$. Sijoitus $S_t^{(0)}$ instrumentilla vastaa korotonta pankkitalletusta tai lainaa riippuen siitä pidetäänkö salkussa positiivista tai negatiivista määrä.

Oikeasti myös rahalla on myös hinta: kun lainaan tänään $1e$ pankilta tänään, tai vastaavasti sijoitan $1e$ pankkitalletukselle, joudun huomeanna maksamaan $(1 + r)e$ pankille, vastaavasti huomenna saan takaisin $(1 + r)e$, jossa r on ennalta sovittu korko lainalle,vastaavasti pankkitalletukselle.

Tietysti reaalimaailmassa pankkilainan korko on pankkitallennuksen korkoa suurempi, tässä käsittelemme pelkistettyä mallia jossa lainan ja tallennuksen korot täsmäävät.

Korosta oletetaan että $r > -1$, koska positiivinen sijoitus ei voi koskaan muuttua nollaksi tai pahemmin velaksi. Itse asiassa näin voi myös tapahtua jos pankki tai valtio menee konkurssiin, mutta tässä puhutaan ennalta sovituista koroista. Joka rahoitusinstrumenttien arvot ovat aina ei-negativiisia, pahimmissa tapauksessa ne voi muuttua nollaksi.

Reaali-maailmassa tietenkin pankkilainan ja pankkitalletuksella on eri korkoja, ja useammin $r \geq 0$, mutta joskus on tapahtunut tosi tilanteita jossa joidenkin valtioiden lainojen korko oli negatiivinen. Silloin puhutaan deflaatiosta.

Kun pankkilainasta tai pankkitalletuksesta maksetaan korkoa $r \neq 0$, ei ole enää mahdollista saada korotonta lainaa muuten kun $r > 0$ voitaisiin rakentaa arbitraasi-salkkua jossa hetkellä $t = 0$ oteteaan korotonta lainaa, tallennetaan raha korolliselle talletustilille, maksetaan velkaa pois hetkellä $t = 1$ ja saadan korot voitoksi (kun $-1 < r < 0$ lainataan korolliselta tililta ja tallennetaan rahaa korottomalle tilille).

Määritelmä 0.1.1. *Olkoon* $(S_t^{(0)}(\omega), S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(d)}(\omega)) \in \mathbb{R}_+^{(d+1)}$ *rahoitusinstrumentteja (osakkeita tai pankkitilitalletuksia). t on aikaparametri , tässä vaiheessa* $t \in \{0, 1\}$.

Kun $P\big(\{\ \omega : S_t^{(0)}(\omega) > 0\}\big) = 1\ \forall t$, *voidaan valita* $S^{(0)}$ *numerääriksi (ranskaksi ja englanniksinuméraire) ja määritellä diskontattua osakevektoria* $\widetilde{S}_t(\omega) \in \mathbb{R}_+^{(d+1)}$, *jossa*

$$\widetilde{S}_t^{(0)}(\omega) \equiv 1, \quad \widetilde{S}_t^{(k)}(\omega) := \frac{S_t^{(k)}(\omega)}{S_t^{(0)}(\omega)}, \quad \forall k, t, \omega$$

siis diskontataan muiden instrumenttien arvot numeräärin instrumenttin suhteen.

Huomautuksia Jos $S_t^{(0)} = (1+r)^t$ on riskiton pankkitalletus deterministisella korolla $r > -1$, ja valitaan $S_t^{(0)}$ numerääriksi, diskontattu osakearvo on

$$\widetilde{S}_t^{(k)}(\omega) = \frac{S_t^{(k)}(\omega)}{(1+r)^t}$$

Tässä asetelmassa sanotaan yleisemmin että $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ on arbitraasi strategia markkinamallissa $(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ kun

$$\begin{aligned} &V_0 = \xi \cdot \pi = 0, \\ &V_1(\omega) = \xi \cdot S_1(\omega) \text{ toteuttaa } P\big(V_1 \geq 0\big) = 1 \text{ ja } P\big(V_1 > 0\big) > 0 \end{aligned}$$

Silloin kun todennäsköisyys avaruus Ω on numeroituva, tämä tarkoittaa että

$$V_1(\omega) \geq 0\ \forall \omega \text{ jolla } P(\omega) > 0, \ \text{ ja } \ \exists \omega^* \text{ jolla } P(\omega^*) > 0 \ \text{ ja } \ V_1(\omega^*) > 0$$

Määritelmä 0.1.2. *Sanotaan että todennäköisyydet P ja Q ovat ekvivalentteja (merkintä: $P \sim Q$) jos niillä on samat nolla joukkoja, eli* $\forall A \subseteq \Omega$

$$P(A) = 0 \equiv Q(A) = 0$$

eli todennäköisyyksillä P ja Q on samat nolla-joukot $\mathcal{N}^P = \mathcal{N}^Q$.

Kun Ω on numeroituva $P \sim Q$ jos ja vain jos $\forall \omega \in \Omega\ P(\omega) = 0 \iff Q(\omega) = 0$

Rahoitusteorian ensimmäinen päälause saa tätä muotoa:

Teoreema 0.1.1. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause, versio 2) Yllä määritely osakemalli on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa riski-neutraali mitta Q jolla $Q \sim P$ ja*

$$E_Q\big(\widetilde{S}_1^{(k)}\big) = \widetilde{S}_0^{(k)} = \widetilde{\pi}_k := \frac{\pi_k}{\pi_0} \quad \forall k = 1, \dots, d$$

Tod. Määritellään diskontattu voittovektori $\widetilde{G}(\omega) \in \mathbb{R}^d$,

$$\widetilde{G}^{(k)}(\omega) = \widetilde{S}_1^{(k)}(\omega) - \widetilde{S}_0^{(k)}(\omega) = \frac{S_1^{(k)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} - \frac{S_0^{(k)}}{S_0^{(0)}}$$

jos $E_Q(\widetilde{G}(\omega)) \neq 0 \in \mathbb{R}^d \, \forall Q \sim P$, erottavan hypertason lauseen nojalla löytyy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ jolla

$$P(\xi \cdot \widetilde{G} \geq 0) = 1 \text{ ja } P(\xi \cdot \widetilde{G} > 0) > 0$$

Määritellään $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{(d+1)}$ jossa

$$\xi_0 = -\sum_{k=1}^{d} \xi_k \widetilde{S}_0^{(k)}$$

Seuraa että $\overline{\xi}$ on arbitraasi salkku koska

$$\overline{\xi} \cdot S_0 = \sum_{k=0}^{d} \xi_k S_0^{(k)} = 0$$

ja

$$\overline{\xi} \cdot S_1 = \xi_0 S_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{d} \xi_k S_1^{(k)} = -S_1^{(0)} \sum_{k=1}^{d} \xi_k \widetilde{S}_0^{(k)} + \sum_{k=1}^{d} \xi_k S_1^{(k)} =$$
$$S_1^{(0)} \sum_{k=1}^{d} \xi_k \left(\frac{S_1^{(k)}}{S_1^{(0)}} - \frac{S_0^{(k)}}{S_0^{(0}} \right) = S_1^{(0)} \sum_{k=1}^{d} \xi_k (\widetilde{S}_1^{(k)} - \widetilde{S}_0^{(k)}) = S_1^{(0)} (\xi \cdot \widetilde{G}),$$

Kun $S_1^{(0)}(\omega) > 0$,

$$(\xi \cdot \widetilde{G}(\omega)) > 0 \Longleftrightarrow \overline{\xi} \cdot S_1(\omega) > 0$$
$$(\xi \cdot \widetilde{G}(\omega)) \geq 0 \Longleftrightarrow \overline{\xi} \cdot S_1(\omega) \geq 0$$

Koska

$$P(S_1^{(0)}(\omega) > 0) = P(\xi \cdot \widetilde{G}(\omega) \geq 0) = 1 \quad \text{ja} \quad P(\xi \cdot \widetilde{G}(\omega) > 0) > 0,$$

seuraa

$$P(\overline{\xi} \cdot S_1 \geq 0) = 1 \quad \text{ja} \quad P(\overline{\xi} \cdot S_1 > 0) > 0 \quad \square$$

Numeräärin vaihto Useammat numeräärivalinnat ovat mahdollisia, eli numerääriksi voidaan myös valita riskillista instrumenttia $S_t^{(k)}$ silloin kun

$$P(S_t^{(k)}(\omega) > 0) = 1 \quad \forall t$$

Riski neutraali mittojen joukko

$$\mathcal{Q} : \left\{ Q \sim P : E_Q\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(k)}}\right) = \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(k)}}, \quad \forall h \neq k \right\}$$

riippuu numeräärin valinnasta.

Sen sijaan arbitraasi vapaus ehtoa ei riipu numeräärin valinnasta, siis jos on olemassa riskineutraali todennäköisyysvektori Q numeräärin $S_t^{(0)}$:n suhteen, mitanvaihtokaavan avulla saadaan riskineutraali todennäköisyysvektoria Q' toisen numeräärin $S_t^{(k)}$ suhteen:

Kun $Q \sim P$ on riskineutraali hinnoittelu-todennäköisyys

$$E_Q\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(0)}}\right) = \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(0)}}, \quad \forall h = 1, \ldots, d$$

ja $P(S_1^{(k)} > 0) = 1$ (joka pätee jos ja vain jos $Q(S_1^{(k)} > 0) = 1$, koska P ja Q:lla on samat nolla joukot), määritellään uskottavuusosamäärä

$$\begin{aligned} Z(\omega) &:= \frac{\widetilde{S}_1^{(k)}(\omega)}{E_Q(\widetilde{S}_1^{(k)})} = \frac{\widetilde{S}_1^{(k)}(\omega)}{\widetilde{S}_0^{(k)}} = \frac{S_1^{(k)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}}, \text{ ja todennäköisyys} \\ Q'(\omega) &:= \ Z(\omega)Q(\omega) = \frac{\widetilde{S}_1^{(k)}(\omega)}{\widetilde{S}_0^{(k)}} Q(\omega) \end{aligned}$$

Huomataan että Q' on todennäköisyys koska

$$Q'(\Omega) = \frac{E_Q(\widetilde{S}_1^{(k)})}{\widetilde{S}_0^{(k)}} = \frac{\widetilde{S}_0^{(k)}}{\widetilde{S}_0^{(k)}} = 1,$$

ja $Q' \sim Q \sim P$ (todennäköisyyksillä on samat nolla joukot) koska oletetusti

$$P\big(S_1^{(0)}(\omega) > 0\big) = Q\big(S_1^{(0)}(\omega) > 0\big) = 1.$$

Satunnaismuuttuja $Z(\omega)$ on mitanvaihdon paino, sitä kutsutaan todennäköyysyyksien väliseksi *uskottavuusosamääräksi* (engl *likelihood ratio*) tai Radon-Nikodymin derivaataksi, merkinnällä

$$Z(\omega) = \frac{dQ'}{dQ}(\omega)$$

Seuraa mitan vaihto kaavan avulla, että Q' on riskineutraali numeräärin $S_t^{(k)}$:n suhteen:

$$E_{Q'}\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(k)}}\right) = \sum_\omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(k)}(\omega)} Q'(\omega) = E_Q\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(k)}} Z\right) =$$
$$\sum_\omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(k)}(\omega)} Z(\omega) Q(\omega) = \sum_\omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(k)}(\omega)} \frac{S_1^{(k)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} Q(\omega) =$$
$$\frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} \sum_\omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} Q(\omega) = \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} E_Q\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(0)}}\right) = \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(0)}} = \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(0)}} \;.$$

Kun riskineutraali todennäköisyys (joka ei ole välttämättä yksikäsitteinen) on olemassa yhden numeräärin suhteen , on olemassa riskineutraaleja todennäköisyyksiä jokaisen laillisen (eli P-melkein varmasti aidosti positiivinen) numeräärin suhteen.

Lause 0.1.1. *Markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\big)$$

jokaisen laillisen numeräärin suhteen (esimerkiksi $S_t^{(0)} > 0$*), hinnoittelu mittojen joukolle*

$$\mathcal{Q} = \left\{\; Q \;\sim P : \widetilde{\pi}_i = E_Q(\widetilde{S}_t^{(i)}), i = 1, \dots, d \right\} \qquad \textit{pätee}$$

1. $\mathcal{Q} = \emptyset$ *, ja markkinamalli sallii arbitraasi,*
2. *tai* $\mathcal{Q} = \{Q\} \neq \emptyset$ *on pistejoukko,*
3. *muuten* $\mathcal{Q}$ *on avoin konveksi joukko.*

Geometrinen todistus: todennäköissysvektoreiden simpleksi

$$\mathcal{P} = \left\{ Q = (q_1, \dots, q_n) : q_k > 0, \sum_{k=1}^n q_k = 1 \right\}$$

on konveksi ja avoin, koska $\partial\mathcal{P} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Silloin eqvivalenttien riskineutraali mittojen joukko on

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \left(\bigcap_{i=1}^d H_i \right)$$

jossa

$$H_i = \left\{ Q \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} Q(\omega_k)\widetilde{S}_1^{(i)}(\omega_k) = E_Q(\widetilde{S}_1^{(i)}) = \widetilde{\pi}^{(i)} \right\}$$

on hypertaso. Hypertasojen ja avoimen konveksi joukon leikkaus on (harjoitustehtävä):

1) tyhjä, 2) pistejoukko, 3) vai avoin konveksi joukko $\square$

Yleisemmin silloin kun Ω on abstrakti todennäköisyysavaruus seuraa samalla tavalle että $\mathcal{Q}$ on tyhjä, pistejoukko, tai ääretön konveksi joukosta. Avoimuudesta emme voi sanoa vielä mitään ennen kun olemme määritelleet topologiaa todennäköisyysmitoille.

Luku 1

Optiot

Olkoon $\left(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \ldots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d\right)$ arbitraasi vapaa markkinamalli. Tässä edelleen Ω on äärellinen, $\forall\omega\ P(\omega) > 0$ referenssi todennäköisyyden suhteen, $S_1^{(i)}(\omega), \pi_i \geq 0$, ja on ainakin yksi instrumentti joka on varmuudella aidosti positiivinen, olkoon $S_t^{(0)}$ kun $P(S_1^{(0)} > 0) = 1$.

Optio tai vaade (engl. option, contingent claim) on satunnaismuuttuja $F(\omega) \geq 0$.

Tyypillisesti $F(\omega) = f(S_1^{(0)}(\omega), \ldots, S_1^{(d)}(\omega))$, kuten eurooppalaiset osto (engl. call) ja myynti (engl. put) optiot

$$F^{\text{osto}}(\omega) = \left(S_1^{(1)}(\omega) - k\right)^+ , \qquad F^{\text{myynti}}(\omega) = \left(k - S_t^{(1)}(\omega)\right)^+$$

lunastushinnalla (engl. strike or exercise price) $k > 0$.

Eurooppalaisen option haltijalle on oikeus ilman velvollisuutta ostaa (myydä) ajanhetkellä $t = 1$ yhden osakkeen $S^{(1)}$ ennalta sovittuun hintaan k.

Jos hetkellä $t = 1$ osakkeen markkinarvo on suurempi kuin lunastushinnan k, osto-option haltija käytää optionsa, ostaa osakkeen ennalta sovittuun hintaan k, ja voittaa $(S_1^{(1)} - k)$ kun myy sen heti markkinahinnalla.

Toisaalta jos $S_1^{(1)}(\omega) \leq k$, option haltija ei käytä optionsa, ja optio $F^{\text{osto}}(\omega)$ tulee arvottomaksi.

Kysymys kuuluu, mikä on option $F(\omega)$ hinta alkuhetkellä $t = 0$?

Optiot kaupattiin pörseissä satoja vuosia, on hämmästyttävää että option hinnoittelun periaate ymmärrettiin oikein vastaa vuonna 1973, Fisher Black ja Myron Scholesin paperissa *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Tästä hyvästä Robert Merton ja M. Scholes saivat taloustieteen Nobelin palkinnon vuonna 1997.

Merkintä Numeräärin valinnalla $S_t^{(0)} > 0$, diskontattu option arvo hetkellä $t = 1$ merkitään

$$\widetilde{F}(\omega) := \frac{F(\omega)}{S_1^{(1)}(\omega)},$$

ja diskontattu hinta hetkellä $t = 0$

$$\widetilde{c}(F) = \frac{c(F)}{\pi_0} = \frac{c(F)}{S_0^{(0}}$$

Teoreema 1.0.1. *Alkuhetkellä $t = 0$, $c(F) > 0$ on johdonmukainen hinta optiolle $F(\omega)$ arbitraasivapaassa markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\big)$$

jos ja vain jos laajennettu markkinamalli

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega), F(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d, c(F)\big)$$

on arbitraasivapaa. Ensimmäisen rahoitusteorian päälauseen perusteella tämä pätee jos ja vain jos

$$c(F) = \pi_0 E_Q\left(\frac{F}{S_1^{(0)}}\right)$$

jossa Q on riskineutraali hinnoitelu mitta numeräärin $S_t^{(0)}$:n suhteen jolla $Q \sim P$ ja

$$\pi_i = \pi_0 E_Q\left(\frac{S_1^{(i)}}{S_1^{(0)}}\right), \quad i = 1, \dots, d$$

Todistus: suoraan ensimmäisen rahoitusteorian päälauseesta.

Teoreema 1.0.2. *Olkoon kuten ennen $F(\omega) \geq 0$ optio arbitraasivapaassa markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\big)$$

(vielä äärellisessä tapahtumaavaruudessa Ω).

Arbitraasivapaiden hintojen joukko $\mathcal{C}(F)$ on pistejoukko $\{\, c(F)\}$, tai avoin väli $(c^{\downarrow}(F), c^{\uparrow}(F))$.

Todistus: olkoon

$$\mathcal{Q} := \left\{ \; Q \sim P : \; Q \text{ on markkinamallin hinnoittelutodennäköisyys numeräärillä } S_t^{(0)} \; \right\}$$

$$\mathcal{C}(F) = \left\{ \; \pi_0 E_Q \left(\frac{F}{S_1^{(0)}} \right) : \quad Q \in \mathcal{Q} \; \right\}$$

Koska kuvaus $Q \mapsto \pi_0 E_Q(\widetilde{F})$ on lineaarinen, ja joukko $\mathcal{Q}$ on pistejoukko vai avoin konveksi, seuraa että sen kuvajoukko $\mathcal{C}(F)$ on pistejoukko vai avoin konveksi = avoin väli, joka on rajoitettu koska Ω on äärellinen $\square$.

Määritelmä 1.0.1. *Edellisessä arbitraasivapaassa markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \ldots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d\big),$$

sijoutus-strategia $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *on ylisuojaus (engl. superhedging), vastaavasti alisuojaus, kun todennäköisyydellä* $P = 1$

$$V_1(\omega) = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \cdot S_1^{(i)}(\omega) \geq F(\omega) \qquad (\textit{vastaavasti} \leq \;) \; .$$

Jos todennäköisyydellä $P = 1$

$$V_1(\omega) = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \cdot S_1^{(i)}(\omega) = F(\omega)$$

matuuritetin hetkellä $T = 1$ *salkun arvo toistaa option arvoa ja* $\overline{\xi}$ *kutsutaan suojaus-strategiaksi (hedging).*

Kun suojaus-stategia on olemassa, sanotaan että optio on toistettavissa (engl. replicable) osakesalkulla, yhden hinnan laista seuraa että hetkellä $t = 0$ ainoa johdonmukainen hinta joka ei mahdollistaa arbitraasia F optiolle on suojaussalkun hinta

$$c(F) = V_0 = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \pi_i$$

Tästä seuraa myös että jos strategia ξ on ylisuojaus (vastaavasti alisuojaus) aidolla epäyhtälöllä positiivisella todennäköisyydellä,

kaikki $c \geq \left(\sum_{i=0}^{d} \xi_i \pi_i \right)$ (vastaavasti $\leq$) ovat arbitraasihintoja.

Lause 1.0.1. *(jatko)*

$$c^{\uparrow}(F) = \inf\left\{ c = \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_0^{(i)} : \exists \xi \in \mathbb{R}^{d+1} : P\left(\sum_{i=0}^{d} \xi_i S_1^{(i)} \geq F\right) = 1\right\}$$

on alaraja ylisuojaussalkkujen hinnoille, ja

$$c^{\downarrow}(F) = \sup\left\{ c = \sum_{i=0}^{1} \xi_i S_0^{(i)} : \exists \xi \in \mathbb{R}^{d+1} : P\left(\sum_{i=0}^{1} \xi_i S_1^{(i)} \leq F\right) = 1\right\}$$

Option F arbitraasivapaaiden hintojen joukko on pistejoukko $\mathcal{C}(F) = \{c(F)\}$ jos ja vain jos optio on toistettavissa, eli jollekin salkulle ξ

$$F(\omega) = \sum_{i=0} \xi_i S_1^{(i)}(\omega)$$

ja $c(F) = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \pi_i$ kaikille suojaussalkuille ξ.

Todistus: ensimmäisen rahoitusteorian päälauseen seuraaksena on olemassa arbitraasisalkku jos ja vain jos hintasysteemille ei löydy riskineutraalitodennäköisyys joillekin (ja sitten kaikille) numeräärin valinnalle.

Näytän miten option arbitraasi-hintoja vastaavat yli- ja ali-suojausalkkuja.

Olkoon $c \geq c^{\uparrow}(F)$ kun $\mathcal{C}(F) = (c^{\downarrow}(F), c^{\uparrow}(F))$, tai $c > c(F)$ kun hinta on yksikäsitteinen $\mathcal{C}(F) = \{\ c(F)\}$.

Rakennetaan ylisuojausta optiolle. Koska markkinamalli $(S_t^{(0)}, \dots, S_t^{(d)})$ on arbitraasivapaa, ja c on arbitraasi-hinta optiolle F, optio on ylihinnoiteltu ja on olemassa arbitraasi salkku laajennetussa markkinamallissa

$$\left(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega), F(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d, c\right)$$

jossa option F:n paino on -1, eli myydään sillä hinnalla yhden option pois alkuhetkellä $t = 0$. Eli on olemassa $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ jolla

$$V_0 = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \pi_i - c = 0, \quad \text{ja } P(V_1 \geq 0) = 1, \quad P(V_1 > 0) > 0 \quad \text{jossa}$$
$$V_1(\omega) = \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_1^{(i)}(\omega) - F(\omega)$$

Toisin sanoen todennäköisyydellä $P = 1$

$$F(\omega) \leq \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_1^{(i)}(\omega)$$

ja positiivisella todennäköisyydellä epäyhtälö on aito. Salkku $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d)$ on ylisuojaus, ja salkun hinta hetkellä $t = 0$ on c.

Vastaavasti kun F option hinta on $c \leq c^{\downarrow}(F)$ kun $\mathcal{C}(F) = (c^{\downarrow}(F), c^{\uparrow}(F))$ tai $c < c(F)$ kun $\mathcal{C}(F) = \{\ c(F)\}$ ja hinta on yksikäsitteinen, voidaan rakentaa abitraasisalkkua jossa option F:lla on paino $+1$, joka vastaa option alisuojausta.

Yhden hinnan laista on selvää että jos optio F on suojattavissa, sillä on yksikäsitteinen hinta eli $\mathcal{C}(F) = \{\ c(F)\}$.

Näytämme että jos optio F ei ole suojattavissa, silloin $\mathcal{C}(F) = \big(c^{\downarrow}(F), c^{\uparrow}(F)\big)$ on avoin väli.

Olkoon $S_t^{(0)}(\omega) > 0$ numerääri.

Koska $F(\omega)$ ei ole suojattavissa,

$$\widehat{F}(\omega) \notin \text{LinearSpan}\left\{1, \widetilde{S}_1^{(i)}(\omega), \ldots, \widetilde{S}_1^{(d)}(\omega)\right\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

jossa $|\Omega| = n$, $P(\omega_i) > 0\ \forall 1 \leq i \leq n$, $\widetilde{F}(\omega) = F(\omega)/S_1^{(0)}(\omega)$, $\widetilde{S}_t^{(1)}(\omega) = S_t^{(i)}(\omega)/S_t^{(0)}(\omega)$, $\widetilde{S}_t^{(0)} = 1$.

Koska lineaarinen aliavaruus on konveksi, ja lineaarinen verho on suljettu (äärellisessä dimensiossa), separoituvan hypertason lauseesta on olemassa $\rho(\omega) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jolla

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1 \text{ ja}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega)\widetilde{F}(\omega) > \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{d+1}} \left\{\sum_{\omega \in \Omega} \textstyle\sum_{i=0}^d \xi_i \rho(\omega)\widetilde{S}_1^{(i)}(\omega)\right\}$$

Lineaarisuudesta seuraa että epäyhtälö säilyy kertomalla oikean puolen mielivaltaisella skalaarilla $r \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa

$$\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i=0}^{d} \xi_i \rho(\omega)\widetilde{S}_1^{(i)}(\omega) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$
$$\iff \sum_{\in \omega \Omega} \rho(\omega)\widetilde{S}_1^{(i)}(\omega) = 0, \quad i = 1, \ldots, d$$

ja myös

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega)\widetilde{F}(\omega) > 0$$

Olkoon $Q \in \mathcal{Q}$, riskineutraali todennäköisyysvektori, jolla $Q(\omega_i) > 0\ \forall i$. Määritellään

$$\alpha = \frac{1}{2} \min_{\omega \in \Omega} \frac{Q(\omega)}{|\rho(\omega)|} > 0\ ,$$

$$\widehat{Q}(\omega) = \big(Q(\omega) + \alpha\rho(\omega)\big) \geq \frac{1}{2}Q(\omega) > 0 \quad \forall\omega \in \Omega$$

$\widehat{Q} \sim P$ on todennäköisyysvektori koska $\rho \cdot 1 = \sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega) = 1$. Huomataan että

$$E_{\widehat{Q}}(\widetilde{S}_1^{(i)}) = E_Q(\widetilde{S}_1^{(i)}) = \widetilde{S}_0^{(i)}$$

eli $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}$ on myös riskineutraali.

Kuitenkin

$$E_{\widehat{Q}}(\widetilde{F}) = E_Q(\widetilde{F}) + \alpha \sum_{\omega} \rho(\omega)\widetilde{F}(\omega) > E_Q(\widetilde{F})$$

aidolla epäyhtälöllä, ja $E_{\widehat{Q}}(\widetilde{F})S_0^{(0)} > E_Q(\widetilde{F})S_0^{(0)}$ ovat molemmat arbitraasivapaaita hintoja optiolle F. Vaihtamalla epäyhtälön suunta erottavan hypertason lauseessa löytyy myös riski neutraali $\check{Q} \sim P$ jolla $E_{\check{Q}}(\widetilde{F}) < E_Q(\widetilde{F})$ aidolla epäyhtälöllä.

I rahoitusteorian päälauseesta seuraa että arbitraasivapaiden hintojen joukko on konveksi joukko, ja ääreöllisessä todennäköisyysavaruudessa se on myös rajoitettu koska kaikki satunnaismuuttujat ovat rajoitettuja, seuraa nyt että arbitraasivapaiden hintojen joukko on avoin väli, joka ei voi olla muuta kun (c_F^-, c_F^+).

Tästä seuraa myös että kun arbitraasivapaa option F hinta on yksikäsitteinen eli $\mathcal{C}(F) = \{c(F)\}$, optio on suojattavissa.

Huomautuksia

1. Kun optio on toistettavissa, suojaussalkku ei tarvitse olla yksikäsitteinen.

2. Samoin, jos arbitraasi-vapaiden hinnoitelutodennäköisyyksien joukko $\mathcal{Q}$ on pistejoukko, myös option arbitraasivapaa hinta $c(F)$ on yksikäsitteinen, mutta arbitraasivapaa hinta $c(F)$ voi olla yksikäsitteinen arbitraasivapaa hinta vaikka arbitraasivapaiden hinnoitelutodennäköisyyksiä olisi useita.

Esimerkki

Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, jossa jokainen tapahtuma $\{\ \omega_i\}$ on mahdollinen, eli $P(\{\ \omega_i\}) > 0\ \forall i$ referenssi todennäköisyysmitan suhteen.

Tarkastellaan markkinamallia jossa on kaksi ajanhetkeä $t = 0, 1$, ja kaksi sijoitusintstrumenttia

$$S_t(\omega), U_t(\omega) \in \mathbb{R}_+$$

Olkoon

$$S_1(\omega_1) = 1 \text{ €}, S_1(\omega_2) = 3/2 \text{ €}, S_1(\omega_3) = 1/2 \text{ €}$$
$$U_1(\omega_1) = 0 \text{ €}, U_1(\omega_2) = 1/2 \text{ €}, U_1(\omega_3) = 1 \text{ €}$$

Tässä markkinamallissa ei ole riskittömiä instrumentteja käytössä.

Arbitraasi-vapaiden hintaparien joukko on (harjoitustehtävä) on avoin kolmio $\overset{\Delta}{ABC}$ kulmapisteilla $A = (1, 0), B = (3/2, 1/2), C = (1/2, 1)$.

Valitsemme mielivaltaisesti tästä joukosta hintaparia $(1, 1/2)$, joka on kolmion sisäpiste, ja asetetaan osakkeiden alkuhinnat hetkellä $t = 0$ $c(S) = 1, c(U) = 1/2$.

Tällä valinnalla markkinamalli $(S_1, U_1, F; c(S), c(U), c(F))$ on arbitraasivapaa. Olkoon

$$F(\omega) := \big(S_1(\omega) - U_1(\omega)\big)^+, \quad \text{jossa } x^+ = \max\{x, 0\}$$

vaihto (swap) optio, joka antaa haltijalle oikeus ilman velvollisuutta vaihtaa hetkellä $t = 1$ yhden $U_1(\omega)$ osakkeen yhtä $S_1(\omega)$ osaketta vastaan.

Laskemme option F arbitraasivaiden hintojen joukko $\mathcal{C}(F)$, markkinamallissa $(S_1, U_1; c(S), c(U))$.

Eli hintoja $c(F)$ jolla laajennettu markkinamalli $(S_1, U_1, F; c(S), c(U), c(F))$ pysyy arbitraasivapaana.

Valitaan numeraariksi S_t (U_t ei kelpaa numeraariksi koska $P(U_1 = 0) > 0$). Merkitään diskontatut instrumenttien arvot seuraavasti:

$$\widetilde{U}_t(\omega) = \frac{U_t(\omega)}{S_t(\omega)}, \quad \widetilde{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{S_1(\omega)}, \quad \widetilde{c}(U) = \frac{c(U)}{c(S)}, \quad \widetilde{c}(F) = \frac{c(F)}{c(S)}.$$

Lasketaan riski neutraali todennäköisyysvektoreiden joukko $\mathcal{Q}$ numeräärin S_t:n suhteen. Saadan yhtälö

$$\frac{1}{2} = \widetilde{c}(U) = E_Q(\widetilde{U}_1) = \sum_{i=1}^{3} Q(\omega_i)\widetilde{U}_1(\omega) = 0 \times (1 - x - y) + x \times \frac{1}{3} + y \times 2$$

jossa $x = Q(\omega_2)$ $y = Q(\omega_3)$, $Q(\omega_1) = 1 - x - y$, rajoituksilla $x, y > 0$, $(x + y) < 1$,

$$\iff 0 < x, \quad 0 < y = 1/4 - x1/6, \quad x + y = 1/4 + 5/6x < 1$$
$$\iff 0 < x, \quad x < 3/2, \quad x < 9/10 \iff 0 < x < 9/10$$

Siis markkinamallissa $(S_1, U_1; c(S) = 1, c(U) = 1/2)$ riskineutraalien hinnoittelutodennäköisyyksien joukko on

$$\mathcal{Q} = \Big\{ \ (q_1(x), q_2(x), q_3(x)) = (3/4 - x \times 5/6, \ x, \ 1/4 - x \times 1/6) \ : 0 < x < 9/10 \Big\}$$

Arbitraasivapaiden hintojen joukko F optiolle on

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(F) &:= \left\{ c(S) E_Q\left(\frac{(S_1 - U_1)^+}{S_1}\right) : \quad Q \in \mathcal{Q} \right\} \\
&= \left\{ \; 1 \times \sum_{\omega=1}^{3} (1 - \widetilde{U}_1(\omega))^+ q_\omega(x) \; : \quad 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= \left\{ \; (1-0)^+ \times q_1(x) + (1-1/3)^+ \times q_2(x) + (1-2)^+ \times q_3(x) \; : 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= \left\{ q_1(x) + 2/3 \times q_2(x) \; : \; 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= \left\{ 3/4 - x \times 5/6 + x \times 2/3 : \; 0 < x < 9/10 \right\} = \left\{ 3/4 - x \times 1/6 : \; 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= (3/5, 3/4)
\end{aligned}$$

eli F optiolla on useita arbitraasivapaaitahintoja markkinamallissa $(S_1, U_1; c(S), c(U))$.

1.1 Täydellisuus

Teoreema 1.1.1. *Olkoon* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ *ja* $\left(S_t^{(0)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)\right)$ *arbitraasivapaa markkinamalli jossa* $S_t^{(0} > 0$ $(P = 1)$.

- *Riskineutraalitodennäköisyys on yksikäsitteinen* $S_t^{(0)}$ *numeräärin suhteen (ja sitten jokaisella numeräärillä) jos ja vain jos*
- *Kaikki optiot eli satunnaismuuttujat* $\omega \mapsto F(\omega) \in \mathbb{R}$ *ovat toistettavissa.*

Silloin sanotaan että markkinamalli on täydellinen

Todistus ($\Longrightarrow$) Koska riskineutraalimittojen joukko $\mathcal{Q} = \{Q\}$ on pistejoukko, jokaiselle optiolle arbitraasi-vapaa hinta on yksikäsitteinen ja optio on toistettavissa.

($\Longleftarrow$) Kun kaikki optiot ovat toistettavissa, $\forall A \subseteq \Omega$ option

$$F(\omega) = \frac{S_1^{(0)}}{S_0^{(0)}} \mathbf{1}_A(\omega)$$

arbitraasivapaiden hintojen joukko on yksikäsitteinen, eli

$$\begin{aligned}
&c(F) = S_0^{(0)} E_Q(\widetilde{F}) = Q(A) \quad \forall Q \in \mathcal{Q} \\
&\Longrightarrow \mathcal{Q} \quad \text{on pistejoukko} \qquad \square
\end{aligned}$$

Seuraus 1.1.1. *Olkoon* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *jossa* $P(\omega_i) > 0$ $\forall i$ *ja arbitraasivapaa markkinamalli* $\big(S_t^{(0)}(\omega), \dots, S_t^{(d)}(\omega); t \in 0, 1\big)$.

Oletamme että satunnaismuuttujat $S_1^{(0)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega)$ $\mathbb{R}^\Omega$ *vektoreina ovat* **lineaarisesti riippumattomia**

Markkinamalli on täydellinen jos ja vain jos $n = (d + 1)$.

Todistus Satunnaismuuttujen joukko on $\mathbb{R}^\Omega \simeq \mathbb{R}^n$ n-ulotteinen lineaarinen avaruus. Toistettavien optioiden aliavaruus on

$$\text{LinearSpan}\left\{ \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_1^{(i)}(\omega) : \quad \xi_i \in \mathbb{R}^{(d+1)} \right\}$$

joka on $(d + 1)$ ulotteinen kun vektorit $(S_1^{(i)}(\omega), \omega \in \Omega)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Luku 2

Diskreetti-aikainen malli

2.1 Informaation filtraatio

Jatkossa $(\Omega, \mathcal{F})$ abstrakti todennäköisyysavaruus, jossa $\mathcal{F}$ on σ-algebra, ja P referenssi-todennäkösyysmitta.

Määritelmä 2.1.1. *Kasvava ali-σ-algebroiden jono $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ aikaindeksilla $\mathbb{T} = \mathbb{N}^+, \mathbb{R}^+$ kutsutaan filtraatioksi*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \quad 0 \le s \le t \in \mathbb{T}$$

Esimerkiksi yhden perioodi mallin filtraatiossa, $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathcal{F}_0 = \{ \emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ kun $t \ge 1$, mutta yleisesti alussa $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{N}^P$, eli $\mathcal{F}_0$ ei tarvitse olla P-triviaali.

σ-algebra $\mathcal{F}_t$ sisältää kaikki tapahtumat jotka ovat varmistuneet tai osoittautuneet mahdottomiksi hetken t:n menneessä. Filtraatio kuvaa informaation kasvua ajan menneessä.

Määritelmä 2.1.2.

- *Stokastinen prosessi on satunnaisvektoreiden kokoelma $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ aika-parameetrilla $\mathbb{T}$.*
- *Kun $\forall t \in \mathbb{T}$, $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, sanotaan että (X_t) on $\mathbb{F}$-sopiva (engl. adapted).*
- *Diskreetti ajassa ($T \subseteq \mathbb{N}$), sanotaan myös että (X_t) on $\mathbb{F}$-ennustettava kun $\forall t \in \mathbb{T}$, $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen.*

Tulkinta Jos X_t on $\mathbb{F}$-sopiva prosessi, kun filtraation $\mathbb{F}$ sisältämän informaatio on käytössä, t hetken arvo $X_t(\omega)$ paljastuu hetkellä t.

Jos X_t on $\mathbb{F}$-ennustettava, $X_t(\omega)$ arvo paljastuu jo hetkellä $(t-1)$.

Määritelmä 2.1.3. *Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra. Silloin $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P) \subset L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on lineaarinen aliavaruus.*

Kun $p = 2$, avaruudella $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on skalaaritulo

$$\langle X, Y \rangle_{L^2} := E_P\big(XY\big)$$

Kun $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ määritellään ehdollinen odotusarvoa ehdolla $\mathcal{G}$ σ-algebraa (conditional expectation)

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = (\Pi_{\mathcal{G}} X)(\omega)$$

jossa $\Pi_{\mathcal{G}}$ on satunnasimuuttujan X ortogonaalinen projektio aliavaruuteen $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ joka toteuttaa

$$E_P(YX) = E_P(Y \Pi_{\mathcal{G}} X) \quad \forall Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tämä määritelmää yleistyy tilanteeseen jossa $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jolla ei ole sisätuloa ja ei voi puhua ortogonaalisesta projektiosta. On kuitenkin olemassa ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

jolla kaikille $Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ (olennaisesti rajoitettuja)

$$E_P(YX) = E_P\Big(Y E_P(X|\mathcal{G})\Big) \tag{2.1.1}$$

Vihje Kun $X(\omega) \geq 0$, jono

$$X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n \in L^\infty \subseteq L^2$$

ja $E_P(|X_n - X|) \to 0$. Osoitetaan että $\Pi_{\mathcal{G}} X_n$ on Cauchy jono $L^1(P, \mathcal{G}, P)$ avaruudessa ja raja-arvo toteuttaa ehdollisen odotusarvon määritelmää (2.1.1).

2.1.1 Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet

- $E_P(E_P(X|\mathcal{G})) = E_P(X)$,
- Kun $Y(\omega)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen $E_P(XY|\mathcal{G}) = Y E_P(X|\mathcal{G})$.
- Kun $Y \overset{\perp\!\!\perp}{P} \mathcal{G}$, $E_P(Y|\mathcal{G}) = E_P(Y)$.
- Lineaarisuus:

$$E_P(aX + bY|\mathcal{G})(\omega) = aE_P(X|\mathcal{G})(\omega) + bE_P(Y|\mathcal{G})(\omega)$$

- Ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori:
  Kun $X(\omega) \geq 0$ $(P = 1)$, seuraa $E(X|\mathcal{G})(\omega) \geq 0$ $(P = 1)$.

2.1.2 Mitanvaihto ehdolliselle odotusarvolle: abstrakti Bayesin kaava

Olkoon Q, P todennäköisyysmitat jossa Q dominoi P:n, $(P \ll Q)$ σ-algebrassa $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$,

eli $Q(A) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{G}$.

Sillon on olemassa Radon-Nikodymin derivaatta $\frac{dP}{dQ}(\omega)$, joka on $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja $L^1(\Omega, \mathcal{G}, Q)$ avaruudessa, jolla

$$Z^{\mathcal{G}}(\omega) = Z^{\mathcal{G}}(P,Q)(\omega) = \frac{dP|\mathcal{G}}{dQ|\mathcal{G}}(\omega) \geq 0$$

eli on voimassa mitan vaihto kaava $\mathcal{G}$-mitalliselle satunnaismuuttujalle $X(\omega)$.

$$E_P(X) = E_Q(XZ(P,Q))$$

Huomataan että $Q(Z(\omega) \geq 0) = P(Z(\omega) > 0) = 1$, ja mitan vaihto kaavasta seuraa $E_Q(Z) = 1$,

Tilastotieteessa ja todennäköisyysteorias $Z(P,Q)$ kutsutaan myös uskottavuus osamääräksi (likelihood ratio).

Kun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ on ali σ-algebra ja $P \ll Q$ $\mathcal{G}$ σ-algebrassa, seuraa $P \ll Q$ on $\mathcal{A}$ σ-algebrassa, ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$Z^{\mathcal{A}}(P,Q) = E_Q(Z^{\mathcal{G}}(P,Q)|\mathcal{A}) \qquad (\text{ martingaalin ominaisuus})$$

Uskottavuusosamäärän avulla saadaan mitanvaihdon kaava ehdolliselle odotusarvolle:

Kun $P \ll Q$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali σ-algebra, ja X is $\mathcal{F}$-mitallinen , *abstrakti Bayesin kaava* pätee:

$$E_P(X|\mathcal{G}) = \frac{E_Q(XZ(P,Q)|\mathcal{G})}{E_Q(Z(P,Q)|\mathcal{G})}$$

Todistus ei ole vaikea: olkoon $B \in \mathcal{G}$, ja $Z = Z^{\mathcal{F}}(P,Q)$. Silloin

$$E_P(X\mathbf{1}_B) = E_Q(ZX\mathbf{1}_B) = E_Q(E_Q(ZX\mathbf{1}_B|\mathcal{G})) = E_Q(E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1_B})$$
$$= E_Q\left(\frac{E_Q(Z|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_B\right) = E_Q\big(Z\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_B\big) = E_P\big(\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_B\big)$$

jossa käytettin mitan vaihton kaavaa odotusarvolle, ja ehdollisen odotusarvon määritelmää.

Esimerkki 2.1.1. *Harjoitustehtäväksi näytämme että todennäköisyyslaskennan elementaarinen Bayesin kaava seuraa tästä abstraktista kaavasta.*

Olkoon $(X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ *satunnaisvektori jolla*

$$P(X \in dx, Y \in dy) = p_{X,Y}(x,y)dxdy$$

kanoonisessa avaruudessa $\Omega = \mathbb{R}^2$ *varustettuna* σ*-algebralla* $\mathcal{F} = \sigma(X,Y)$.

Merkitään marginaalit tiheysfunktiot

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y)dy, \quad p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y)dx, \quad \textit{joilla}$$
$$P(X \in dx) = p_X(x)dx, \quad P(Y \in dy) = p_Y(x)dy$$

Otamme dominoivaksi mitaksi jotakin tulomittaa, esimerkiksi

$$Q(dx, dy) = p_X(x)p_Y(y)dxdy$$

Huomataan että $P \ll Q$ *koska*

$$0 = Q_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \iff P_{X,Y}(A \times \mathbb{R})P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B) = 0$$
$$\iff P_{X,Y}(A \times \mathbb{R}) = 0 \quad \textit{tai} \quad P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B) = 0$$
$$\implies P_{X,Y}(A \times B) = 0$$

Jos $D \in R^2$ *on Borel-mitallinen on olemassa jono nelikulmaisia joukkoja* $D_n = A_n \times B_n \uparrow D$, *ja monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että* $Q_{X,Y}(D) \implies P_{X,Y}(D) = 0$ *pätee kaikille Borel-mitallisille joukoille* D. *RN-derivaatta on*

$$Z(P,Q) = \frac{dP}{dQ}(x,y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)} = z(x,y)$$

Kun ehdollistetaan ali-σ*-algebraan* $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, *abstraktista Bayesin kaavasta formula seuraa rajoitetuille mitallisille testifunktiolle* $f(x,y)$,

$$E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = \frac{E_Q(f(X,Y)z(x,y)|\sigma(Y))(\omega)}{E_Q(z(x,y)|\sigma(Y))(\omega)}$$
$$= \frac{E_Q(f(X,y)z(X,y)}{E_Q(z(X,y)}\bigg|_{y=Y(\omega)} = \frac{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} z(x,Y(\omega))p_X(x)p_Y(y)dxdy}$$
$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} z(x,Y(\omega))p_X(x)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\frac{p_{X,Y}(x,Y(\omega))}{p_X(x)p_Y(Y(\omega))}\; p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \frac{p_{X,Y}(x,Y(\omega))}{p_X(x)p_Y(Y(\omega))}\; p_X(x)dx} =$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\frac{p_{X,Y}(x,Y(\omega))}{p_Y(Y(\omega))}\; dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x|\; Y(\omega))dx$$

jossa ehdollisen jakauman tiheysfunktio on

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} p_{XY}(x',y)dx'}$$

2.2 Dikreetti-aikainen markkinamalli

Olkoon $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}$, aikaindeksilla $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\} \subseteq \mathbb{N}$, ja $(d+1)$-ulotteinen osakeprosesessi

$$S_t(\omega) := \big(S_t^{(0)}(\omega), S_t^{(1)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)\big) \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \in \mathbb{T}$$

jossa $\forall t \in \mathbb{T}$, todennäköisyydellä $(P = 1)$,

$$S_t^{(0)}(\omega) > 0 \quad \text{ja } S_t^{(k)}(\omega) \geq \quad \forall k = 1, \ldots, (d+1)$$

Diskontatut osakkeiden arvot numeräärillä $S_t^{(0)}$ merkitään

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t(\omega) &= \big(\widetilde{S}_t^{(1)}(\omega), \ldots, \widetilde{S}_t^{(1)}(\omega)\big) \in \mathbb{R}_+^d \quad \text{jossa} \\ \widetilde{S}_t^{(k)}(\omega) &= \frac{S_t^{(k)}(\omega)}{S_t^{(0)}(\omega)}, \quad k = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

Olkoon $\xi_t(\omega) := \big(\xi_t^{(0)}(\omega), \xi_t^{(1)}(\omega), \ldots, \xi_t^{(d)}(\omega)\big)$ sijoitus strategia. Salkun arvo hetkellä t on

$$V_t = \xi_t S_t = \sum_{i=0}^{d} \xi_t^{(i)} S_t^{(i)}$$

jossa $\xi_t S_t$ merkitsee skalaarituloa $\mathbb{R}^{d+1}$ avaruudessa.

Huomataan että sijoitusstrategiamme saa olla satunnainen.

Määritelmä 2.2.1. *Merkitään diskreetti aikainen martingaalimuunnos (tai stokastinen integraali)*

$$(\xi \cdot S)_t := \sum_{r=1}^{t} \xi_r (S_r - S_{r-1}) = \sum_{r=1}^{t} \xi_r \Delta_r$$

Lemma 2.2.1. *Diskreetti aikainen osittaisintegrointi kaava:*

$$\begin{aligned} V_t &= \xi_t S_t = V_0 + \sum_{r=1}^{t} \xi_r \Delta S_r + \sum_{r=1}^{t} S_{r-1} \Delta \xi_r \\ &= V_0 + (\xi \cdot S)_t + (S_- \cdot \xi)_t = V_0 + (\xi \cdot S)_t - C_t \end{aligned}$$

jossa $S_-(t) := S(t-1)$, ja salkun kulutus prosessi on

$$C_t := -(S_- \cdot \xi)_t = -\sum_{r=1}^{t} S_{r-1}(\xi_{r-1} - \xi_t)$$

Tulkinta: kun $\Delta C_t > 0$, ajanhetkien $(t-1)$ ja t:n välissä otetaan pois varallisuutta salkusta, kun $\Delta C_t < 0$ lisätään varallisuutta.

Määritelmä 2.2.2. *Sanotaan että salkku on itsensä-rahoittava tai omarahoitteinen (self-financing) jos $\forall t$, $C_t \equiv 0$, eli*

$$V_t = V_0 + (\xi \cdot S)_t = \xi_0 S_0 + \sum_{r=1}^{t} \xi_r \Delta S_r$$

$\forall t$ todennäköisyydellä $P = 1$.

Määritelmä 2.2.3. *Satunnaisprosessi $(S_t : t \in \mathbb{N})$ on $(\mathbb{F}, P)$-martingaali filtraation $\mathbb{F}$ ja todennäköisyysmitan P:n suhteen kun*

1. *S_t on $\mathbb{F}$-sopiva*
2. $$E_P(|S_t|\ ) < \infty \quad \forall t$$
3. $$E_P(S_t|\mathcal{F}_r) = S_r \text{ kun } 0 \le r \le t$$

Moniulotteinen prosessi on martingaali kun jokainen koordinatti on martingaali. Sanotaan myös että S_t on yli- vai ali-martingaali (supermartingale, submartingale) kun

$$E_P(S_t|\mathcal{F}_r) \le \quad (\text{ vastaavasti } \ge\ ) \ S_r \text{ kun } 0 \le r \le t$$

Esimerkki 2.2.1. *Olkoon $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$. Olkoon P ja Q todennäköisyyksia joiden suhteen satunnaismuuttujat $(X_s : s = 1, \dots, n)$ ovat riippumattimia ja samoin jakautuneita, ja*

$$P(X_1 \in dx) = f(x) Q(X_1 \in dx).$$

Olkoon $\mathcal{F}_s = \sigma(X_1, \dots, X_s)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s : s = 1, \dots, n)$. Seuraa

$$Z_t(P,Q) = \prod_{s \in \mathbb{N}: s \le t} f(X_s(\omega)) = \prod_{s \in \mathbb{N}: s \le t} \frac{dP_X}{dQ_X}(X_s(\omega))$$

on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali.

Teoreema 2.2.1. *Olkoon S_t $(P,\mathbb{F})$-martingaali ja ξ_t $\mathbb{F}$-ennustettava prosessi, jossa $\xi_t \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P)$.*

Silloin martingaali muunnos $(\xi \cdot S)_t$ on $\mathbb{F}$-martingaali.

Todistus Ehdollisen odotusarvon ominaisuudesta.

Huomautus Koska $\Delta S_t \in L^1(P)$ ehto $\xi_t \in L^\infty(P)$ takaa että

$$E_P\biggl(\xi_t \Delta S_t\biggr) < \infty$$

Jos $\xi_t \in L^0(P)$ on pelkästään mitallinen, voidaan määritellä *pysähdyshetkien* jono

$$\tau_n = \inf\{t \in \mathbb{T} : \ |\xi_t| \le n\}$$

jossa $\tau_n(\omega) \uparrow \infty$ kun $n \to \infty$ (Huomataan että $\inf \emptyset := +\infty$) Koska ξ_t on $\mathbb{F}$-ennustettava, prosessi

$$\mathbf{1}(\tau_n > t)\xi_t \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P)$$

Tästä seuraa että pysähydetty prosessi

$$\bigl(\xi \cdot S\bigr)_t^{\tau_n} := \bigl(\xi \cdot S\bigr)_{t\wedge\tau_n} = \sum_{r=1}^{t} \mathbf{1}(\tau_n > r)\xi_r \Delta S_t$$

on martingaali. Eli seuraavan määritelmän mukaan diskreetti stokastinen integraali $(\xi \cdot S)_t$ on $(\mathbb{F}, P)$-lokaali martingaali.

Määritelmä 2.2.4.

- *Olkoon $\tau(\omega) \in \mathbb{N}$ satunnainen ajanhetki. Sanotaan että τ on $\mathbb{F}$ pysähdyshetki jos ja vain jos*

$$\Bigl\{\ \omega : \tau(\omega) \le t\Bigr\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

- *Olkoon $(M_t : t \in \mathbb{T})$ $\mathbb{F}$-sopiva prosessi. Sanotaan että (M_t) on $(\mathbb{F}, P)$-lokaali martingaali jos on olemassa $\mathbb{F}$-pysähdyshetkien jono $\tau_n(\omega) \uparrow +\infty$ $(P = 1)$ jolla jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, pysäyhdetty prosessi $(M_{t\wedge\tau_n} : t \in \mathbb{T})$ on $(\mathbb{F}, P)$-martingaali.*

- *Sanotaan että satunnaisprosessilla $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ jokin satunnaisprosessien ominaisuus pätee $\mathbb{F}$-lokaalisesti, jos on olemassa $\mathbb{F}$-satunnaishetkien jono $\tau_n(\omega) \uparrow \infty$,*

  jolla jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pyhsaydetylle prosessille $(X_{t\wedge\tau_n}(\omega) : t \in \mathbb{N})$ kyseinen ominaisuus on voimassa.

  Siis voidaan puhua $\mathbb{F}$-lokaalisista martingaaleista, $\mathbb{F}$-lokaalisesti rajoitetuista prosesseseista, $\mathbb{F}$-lokaalisesti neliö-integroituvista prosesseista ja niin edelleen.

Lemma 2.2.2. • *Diskreetti ajassa,* $(\mathbb{F}, P)$*-lokaali martingaali* $(S_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ *jolla*

$$E_P(X_t^+) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}, \qquad tai \qquad E_P(X_t^-) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

on aito $(\mathbb{F}, P)$*-martingaali. Erityisesti ei negatiivinen diskreetti aikainen lokaali martingaali on aito martingaali.*

- *Sen lisääksi jos* $(S_t(\omega) : t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ *on diskreetti aikainen* $(\mathbb{F}, P)$*-lokaali-martingaali jossa* $T < \infty$*, ja*

$$S_T(\omega) \geq 0 \qquad (P = 1)$$

seuraa että $(S_t(\omega) : t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ *on aito* $(\mathbb{F}, P)$*-martingaali, ja sen takia myös* $S_t(\omega) \geq 0$ $\forall t = 0, 1, \ldots, t$*,* $(P = 1)$*.*

Huom Jatkuvassa ajassa ei-negatiivinen lokaali martingaali on ylimartingaali mutta ei välttämättä martingaali.

Tod. Fatou lemman ja dominoidun konvergenssin avulla, katso Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance, Corollary s. 101.

Määritelmä 2.2.5. *Markkinamallimme on arbitraasi vapaa kun kaikille itsensärahoittavillea ja* $\mathbb{F}$*-ennustettaville strategioille* $\xi_t(\omega)$*, pätee*

$$P(V_0 = 0) = 1 \text{ ja } P(V_T \geq 0) = 1,$$

seuraa

$$P(V_T = 0) = 1,$$

jossa prosessi $V_t = \xi_t S_t$*, on salkun arvo.*

Huomautukset Tässä σ-algebra $\mathcal{F}_0$ ei tarvitse olla triviaali, siis salkun painot hetkellä 0 toteuttavat

$$V_0 = \xi_0 S_0 = \xi_1 S_0$$

jossa S_0 ja ξ_1 ovat $\mathcal{F}_0$ mitallisia.

Ekvivalentti ehto: jos ξ_t on itsensärahoittava ja

$$P(\widetilde{V}_0 \leq 0) = 1 \text{ ja } P(\widetilde{V}_T \geq 0) = 1, \Longrightarrow P(V_T = 0) = 1$$

jossa $\widetilde{V}_t = V_t / S_t^{(0)}$ on diskontattu arvo, joka pätee jos ja vain jos

$$\widetilde{V}_T - \widetilde{V}_0 = (\xi \cdot \widetilde{S})_T \geq 0 \quad (P = 1), \text{ seuraa } (\xi \cdot \widetilde{S})_T = 0 \quad (P = 1)$$

Lemma 2.2.3. *Olkoon $X(\omega) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eli satunnaismuuttuja, jolla*

$$P(X > 0) > 0 \quad \textit{ja} \quad P(X < 0) > 0$$

On olemassa todennäköisyysmitta $Q \sim P$ jolla $\frac{dQ}{dP}(\omega)$ on rajoitettu ja

$$E_Q(X) = 0$$

Tod. Määritellään todennäköisyysmitta P_0 jolla

$$P_0(A) := \frac{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\mathbf{1}_A\Big)}{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\Big)}$$

jossa

$$\frac{dP_0}{dP}(\omega) := \frac{\exp\big(-X^2\big)}{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\Big)} \quad \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$$

Oletuksesta seuraa että on olemassa $\delta > 0$ ja $\varepsilon > 0$ jolla

$$P(X > \delta) > \varepsilon \text{ ja} \quad P(X < -\delta) \geq \varepsilon \,.$$

Koska $X(\omega) \in \mathbb{R}$

$$0 < \exp(-X^2) < 1 \quad (P = 1)$$

eli mitan vaihdon uskottavuusosamäärä (dP_0/dP) on olennaisesti rajoitettu.

Otetaan seuraavaksi P_0 mitan Esscherin muunnos:

$$P_\theta(A) = \varphi(\theta)^{-1} E_{P_0}\Big(\exp\big(\theta X\big)\mathbf{1}_A\Big) \quad \text{jossa}$$
$$\varphi(\theta) := E_{P_0}\Big(\exp\big(\theta X\big)\Big)$$

Osoitan että on olemassa θ^* jolla

$$E_{P_{\theta^*}}\Big(\Delta\widetilde{S}_1 | \mathcal{F}_0\Big) = 0, \qquad (P = 1).$$

Apulause Kuvaus $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ on aidosti konveksi:

$$\frac{d}{d\theta}\varphi(\theta) = E_{P_0}\bigg(\frac{d}{d\theta}\exp\big(\theta X\big)\bigg) =$$
$$E_{P_0}\bigg(X\exp\big(\theta X\big)\bigg),$$
$$\frac{d^2}{d\theta^2}\varphi(\theta) = E_{P_0}\bigg(\frac{d^2}{d\theta^2}\exp\big(\theta X\big)\bigg) > 0$$

Todistus Osoitetaan että derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto on sallittu. Dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa että voidaan vaihtaa derivoinnin ja odotusarvon järjestystä koska kun $\varepsilon > 0$ jolla $\forall 0 < \theta - \varepsilon < \vartheta < \theta + \varepsilon$ seuraa kaikille $n \geq 1$

$$|x|^n \exp(\vartheta x - x^2) \leq |x|^n \exp(\theta x - x^2)\bigg(\exp(\varepsilon x) + \exp(-\varepsilon x)\bigg) \leq k_n \exp(-cx^2)$$

jollekin $k_n > 0$, $0 < c < 1$. Siis satunnaismuuttuja

$$|X(\omega)|^n \exp(\vartheta X(\omega) - X(\omega)^2) \leq k_n \exp(-cX^2(\omega)) \in L^1(P)$$

Eli voidaan vaihtaa derivoinnin ja integroinnin järjestyksen.

Merkitään

$$\varphi(\theta) = E_{P_0}\big(\exp(\theta X)\big)$$

Dominoidun konvergenssin lauseen avulla seuraa vaihtamalla derivoinnin ja integroinnin järjestystä että kuvaus $\theta \mapsto \varphi$ on derivoituva. Erityisesti

$$\frac{d}{d\theta}\log\varphi(\theta) = \frac{E_{P_0}\bigg(X\exp\big(\theta X\big)\bigg)}{E_{P_0}\bigg(\exp\big(\theta X\big)\bigg)} = E_{P_\theta}\big(X\big)$$

Huomataan että jos θ_* on konveksi kuvauksen $\theta \mapsto \varphi(\theta) \geq 0$ minimipiste,

$$E_{P_{\theta_*}}\big(X\big) = 0$$

Osoitan että selläinen minimipiste θ_* on olemassa. Muuten on olemassa jono $\theta_n \to \pm\infty$ jolla

$$\varphi_* := \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \varphi(\theta) \leq \varphi(\theta_n) \downarrow \varphi_*$$

Jos esimerkiksi $\theta_n \uparrow \infty$, on olemassa $\delta > 0$ jolla $P(X > \delta) > 0$ ja siksi myös $P_0(X > \delta) > 0$

$$\varphi(\theta_n) = E_{P_0}\big(\exp(\theta_n X)\big) \geq P_0(X > \delta)\exp(\delta\theta_n) \to \infty \quad \text{kun } n \uparrow \infty$$

Koska jono (θ_n) jonka kautta savutetaan minimi ei mene äärettömiin, se pysyy kompaktissa ja siksi on olemassa suppeneve alijono joka suppenee kohti minimipisteeseen $\theta_* \in \mathbb{R}$.

Teoreema 2.2.2. *I rahoitusteorian päälause, diskreetti ajassa.*

Malli on arbitraasi vapaa, jos ja vain jos on olemassa todennäköisyysmitta $Q \sim P$ todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ jolla diskontattu osake prosessi $\widetilde{S}_t$ on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali.

Sen lisääksi voidaan valita Q jolla $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ (olennaisesti rajoitettu).

Todistus ($\Longleftarrow$) Olkoon $\widetilde{S}^{(i)}_t(\omega) = S^{(i)}_t(\omega)/S^{(0)}_t(\omega), \quad i = 1, \ldots, d$ jossa numeraari $S^{(0)}_t(\omega) > 0\ \forall t$, $(P = 1)$.

Jos $\xi_t = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d)$ on F-ennustettava ja itsensä rahoittava salkku, diskontattu salkun arvo on

$$\widetilde{V}_T = \xi_T\widetilde{S}_T = \xi_0\widetilde{S}_0 + `\sum_{t=1}^{T}\widetilde{S}_t\Delta\xi_t + \sum_{t=1}^{T}\xi_t\Delta\widetilde{S}_t = \widetilde{V}_0 + \big(S_- \cdot \xi\big)_T + \big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_T$$
$$= \widetilde{V}_0 + \big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_T$$

Koska $\big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_t$ on martigaali muunnos jossa integrandi on $\mathbb{F}$-ennustettava ja integraattori on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali, se on lokaali martingaali.

Jos $V_0(\omega) = 0$ ja $V_T(\omega) \geq 0$, myös $\widetilde{V}_0(\omega) = 0$ ja $\widetilde{V}_T(\omega) = \big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_T \geq 0$, ja Shiryaevin lemma seuraa että $\widetilde{V}_t$ on aito martingaali.

Siksi $E_Q\big(\widetilde{V}_T\big) = E_Q\widetilde{(}V_0) = 0$, ja koska $\widetilde{V}_T(\omega) \geq 0$ seuraa että $V_T(\omega) = 0$ Q ja P-todennäköisyydellä 1.

Siis malli on arbitraasivapaa.

Todistuksen toinen suunta ($\Longrightarrow$). Esitän Albert Shiryaevin konstruktiivisen todistuksen, vaihtoehtoisesti voidaan käytää erottavan hypertason lausetta ääretön ulotteisessa normi-avaruudessa.

Olkoon ensin $d = 1$ ja $T = 1$, merkitään $\widetilde{S}_t = \widetilde{S}^{(1)}_t = S^{(1)}_t/S^{(0)}_t$. Oletetaan myös että σ-algebra $\mathcal{F}_0 = \mathcal{N}^P$ on P-triviaali.

Jos malli on arbitraasi vapaa,

$$P(\Delta\widetilde{S}_t > 0) > 0 \text{ ja } P(\Delta\widetilde{S}_t < 0) > 0$$

muuten malli on triviaali eli $P(\Delta\widetilde{S}_t = 0) = 1$ tai jompikumpi

$$\begin{gathered} P(\Delta\widetilde{S}_t \geq 0) = 1 \text{ ja } P(\Delta\widetilde{S}_t > 0) > 0 \\ \text{tai } P(\Delta\widetilde{S}_t < 0) = 1 \text{ ja } P(\Delta\widetilde{S}_t < 0) > 0 \end{gathered}$$

on tosi ja voidaan rakentaa arbitraasi strategia. Esscherin muunnoksen avulla rakennetaa riskineutraali mitta $Q \sim P$ jolla

$$E_Q\big(\Delta\widetilde{S}_1\big) = 0$$

eli tässä tapauksessa $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1)$ on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali.

Olkoon edelleen $d = 1$, mutta käsitellan monijaksoista mallia.
Koska malli on arbitraasi vapaa, todennäköisyydellä $(P = 1)$

$$P(\Delta S_t > 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0 \text{ ja } P(\Delta S_t < 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0$$

ja sama pätee diskontatulle osakeelle $\widetilde{S}_t$. Muuten, positiivisella todennäköisyydellä, joskus

$$P(\Delta S_t \geq 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 \text{ ja } P(\Delta S_t > 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0$$

tai

$$P(\Delta S_t \leq 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 \text{ ja } P(\Delta S_t < 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0$$

ja silloin voitaisiin rakentaa arbitraasistrategiaa, lainaamalla numerääri instrumentteja ja ostamalla osakkeita (tai päinvastoin).

Esscherin muunnoksen avulla löytyy satunnaismuuttuja $\zeta_t(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolla

$$E_P(\zeta_t \Delta\widetilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 0$$

Tärkemmin, olkoon

$$\varphi(\theta, \omega, t) = E_P\bigg(\exp\Big(-\big(\Delta\widetilde{S}_t\big)^2 + \theta\Delta\widetilde{S}_t\Big)\bigg|\mathcal{F}_{t-1}\bigg)(\omega)$$

Arbitraasivapaus-oletuksesta seuraa että jokaiselle ω:lle on olemassa

$$\theta_*(t, \omega) := \arg\min_\theta \varphi(\theta, \omega, t)$$

ja voidaan osoittaa että se on $\mathcal{F}_{t-1}$ mitallinen. Tämä seuraa koska

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \varphi(\theta, \omega, t) = \inf_{\theta\in\mathbb{Q}} \varphi(\theta, \omega, t)$$

on $\mathcal{F}_{t-1}$ mitallinen, ja jokaiselle ω:lle kuvaus $\theta \mapsto \varphi(\theta,\omega,t)$ on konveksi ja siksi jatkuva (harjoitustehtävä), ja voidaan rakentaa $\mathcal{F}_{t-1}$- mitallinen jono

$$\theta_n(t,\omega) = \arg\min_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k/n,\omega,t)$$

jolla

$$\varphi(\theta_n(\omega,t),\omega,t) \to \inf_{\theta\in\mathbb{Q}} \varphi(\theta,\omega,t) = \varphi_*(t,\omega)$$

Olkoon

$$\zeta_t(\omega) := \exp\Big(-\big(\Delta\widetilde{S}_t\big)^2 + \theta\Delta\widetilde{S}_t \Big) \varphi(\theta,\omega,t)^{-1}$$

jolla $\zeta_t(\omega) \in L^1(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ jolla

$$E_P\big(\zeta_t \big| \mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = 1 \qquad E_P\big(\zeta_t \Delta\widetilde{S}_t \big| \mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = 0$$

ja määritellään

$$Z_T(\omega) = \prod_{t=1}^{T} \zeta_t(\omega) > 0$$

ja σ-algebrassa $\mathcal{F}_T$ todennäköisyysmitta $Q \sim P$

$$Q(d\omega) = Z_T(\omega)P(d\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega)P(d\omega)$$

Q on todennäköisyysmitta koska

$$Q(\Omega) = E_P(Z_T) = E_P\left(\prod_{t=1}^{T} \zeta_t(\omega) \right) = E_P\left(\prod_{t=1}^{T} E_P\big(\zeta_t(\omega)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) \right) = 1$$

Huomataan myös että (Z_t) on $(P,\mathbb{F})$-martingaali:

$$E_P\big(Z_t(\omega)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = Z_{t-1}(\omega)E_P\big(\zeta_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = Z_{t-1}$$

Osoitan että $(\widetilde{S}_t : t = 0,1,\ldots,T)$ on $(Q,\mathbb{F})$-martingaali: abstraktista Bayesin kaavasta

$$E_Q\big(\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = \frac{E_P\big(Z_T\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega)}{E_P\big(Z_T\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega)}$$
$$= \frac{E_P\big(Z_t\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega)}{Z_{t-1}(\omega)} = E_P\left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}}\Delta\widetilde{S}_t \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right)(\omega) =$$
$$E_P\big(\zeta_t\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = 0 \quad \square$$

Tapaus jossa $d > 1$ sivutetaan toistaseksi.

Luku 3

Martingaaliesitys ja täydellisuus

Teoreema 3.0.1. *(Aika-diskretti Doob-Meyerin hajotelma).*
Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{F}$*-sopiva prosessi filtraatiossa* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$*.*
Ja $E(|X_t|) < \infty \ \forall t = 0, 1, \dots, T$*.*
Silloin

- $$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

  jossa $A_0 = M_0 = 0$*,* A_t *on* $\mathbb{F}$*-ennustettava ja* M_t *on* $\mathbb{F}$*-martingaali.*

- *Doobin hajotelma on yksikäsitteinen.*

- *Jos* (X_t) *on ylimartingaali (vastaavasti alimartingaali) ennustettava osa* A_t *on ei-kasvava (vastaavasti ei-väheneva).*

Todistus

$$\Delta X_t = (\Delta X_t - E_P(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1})) + E_P(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \Delta M_t + \Delta A_t$$

jossa

$$A_t = \sum_{s=1}^{t} E_P(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}), \quad M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\Delta X_t - E_P(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1})\big) \ .$$

Olkoon

$$X_t - X_0 = A_t + M_t$$

toinen Doobin hajotelma.

Silloin $(M_t - M_t) = (A_t - A_t)$ eli $(M_t - M_t)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava $\mathbb{F}$-martingaali joka saa arvo 0 kun $t = 0$, eli se on identtisesti nolla.

3.1 (Lokaalisesti) neliö-integroituvat martingaalit ja ennustettava kovariaatio

A $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale (M_t) is square integrable when $E(M_t^2) < \infty$ for all t.

If M_t, N_t are square integrable martingales then by using Cauchy-Schwartz inequality

$$E(|M_t N_t|) \leq \sqrt{E(M_t^2)}\sqrt{E(N_t^2)} < \infty$$

so that the product $(M_t N_t)$ is in L^1 and it makes sense to consider its Doob-Meyer decomposition:

We have

$$M_t N_t - M_{t-1} N_{t-1} = M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \Delta M_t \Delta N_t =$$
$$M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \big(\Delta M_t \Delta N_t - E_P(\Delta M_t \Delta N_t|\mathcal{F}_{t-1})\big) + E_P(\Delta M_t \Delta N_t|\mathcal{F}_{t-1})$$

We introduce the predictable process

$$\langle M, N\rangle_t := \sum_{s=1}^{t} E_P(\Delta M_s \Delta N_s|\mathcal{F}_{s-1})$$

We obtain the Doob-Meyer decomposition

$$M_t N_t = M_0 N_0 + \langle M, N\rangle_t + m_t$$

where dm_t the sum the martingale increments

$$dm_t = M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \big(\Delta M_t \Delta N_t - E_P(\Delta M_t \Delta N_t|\mathcal{F}_{t-1})\big)$$

where the integrability conditions in the definition of martingale follow from Cauchy-Schwartz inequality since we have assumed M and N are square-integrable.

We denote also

$$[M, N]_t := \sum_{s=1}^{t} \Delta M_s \Delta N_s$$

it follows that the process $([M, N]_t - \langle M, N\rangle_t)$ is a $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale.

$[M, N]_t$ is called quadratic covariation or square-bracket process, while $\langle M, N\rangle_t$ is called predictable covariation, or predictable-bracket process.

Since $E((\Delta M_t)_P|\mathcal{F}_{t-1}) \geq 0$, the process $([M,M]_t)$ is a submartingale and therefore $(\langle M,M\rangle_t)$ is non-decreasing. The notations $[M]_t := [M,M]_t$ and $\langle M\rangle_t := \langle M,M\rangle_t$ are also used.

Note $[M,N]_t$ does not depend on the measure P, but the predictable bracket $\langle M,N\rangle_t$ does !

Määritelmä 3.1.1. *Two square integrable martingales $(M_t),(N_t)$ are orthogonal if the product (M_tN_t) is a martingale. Equivalent conditions are*

i) $[M,N]_t$ is a martingale,

ii) $\langle M,N\rangle_t = 0$, which means $E_P(\Delta M_t \Delta N_t|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 0$ P a.s.

3.2 Orthogonal projections in the space of square integrable martingales

Let M and N two square integrable martingales,

We write

$$N_t = N_0 + (H\cdot M)_t + N_t^{\perp} = N_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \Delta M_s + N_t^{\perp} \tag{3.2.1}$$

where (H_t) is the predictable process

$$H_t = \frac{\Delta\langle M,N\rangle_t}{\Delta\langle M,M\rangle_t} = \frac{E_P(\Delta M_t\Delta N_t|\mathcal{F}_{t-1})}{E_P((\Delta M_t)^2|\mathcal{F}_{t-1})} \tag{3.2.2}$$

where by the Cauchy-Schwartz inequality

$$\Delta\langle M\rangle_t = 0 \Longrightarrow \Delta\langle M,N\rangle_t = 0$$

and in such case we set $0/0 = 0$ and $N_t^{\perp}$ is a P-martingale orthogonal to M_t.

A bounded martingale has bounded increments (jumps). If N_t is a bounded martingale with representation (3.2.1) where $N_t^{\perp} = 0$ $\forall t \in \mathbb{N}$, then either $H_s(\omega) \equiv 0$, or necessarily the increments $\Delta M_s(\omega)$ are locally bounded. In particular the martingale $(M_t - M_0 : t \in \mathbb{N})$ is locally square integrable, necessarily the predictable integrand in the discrete stochastic integral is also given by (3.2.2).

Note also that

$$\Delta\langle M\rangle_t := E_P\big((\Delta M_t)^2\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) < \infty \text{ and } E_P\big(\Delta\langle M_t\rangle\big) < \infty \Longleftrightarrow E_P\big((\Delta M_t)^2\big) < \infty$$

It is possible that $\Delta\langle M\rangle_t < \infty$ $(P=1)$ but $E_P((\Delta M_t)^2) = \infty$ (M_t is not integrable). In such case we can still use the notion of predictable covariation and orthogonality of martingales.

3.3 Martingale property and change of measure

Teoreema 3.3.1. *Let $Q \ll P$ and let*

$$Z_t(\omega) = Z_t(Q, P) = \frac{dQ_t}{dP_t}(\omega)$$

Then M_t is a $(Q, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale if and only if the product $(M_t Z_t)$ is a $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale.

Proof for $s \leq t$, let $A \in \mathcal{F}_s$.

$$E_Q(1_A(M_t - M_s)) = E_P(1_A Z_t(M_t - M_s)) = E_P(1_A(Z_t M_t - Z_s M_s))$$

where we use the properties of the conditional expectation. By definition of conditional expectation it means that

$$E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ if and only if } E_P(Z_t M_t|\mathcal{F}_s) = Z_s M_s$$

3.4 Doob decomposition and change of measure

Suppose that M is a $(P, \mathcal{F}_t)$ martingale with $M_0 = 0$ and $\Delta M_t > -1$.

$$Z_t = \mathcal{E}(M)_t := \prod_{s=1}^{t}(1 + \Delta M_t) = \left(1 + \sum_{s=1}^{t} Z_{s-1}\Delta M_s\right) > 0$$

and we define on each $\mathcal{F}_t$ consistently a measure

$$Q_t(d\omega) = Z_t(\omega) P_t(d\omega)$$

If $(Z_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ is integrable, then (Z_t) is a P-martingale and $Q_t(\Omega) = E_P(Z_t) = Z_0 = 1$ which is a probability measure.

Esimerkki 3.4.1. *Assume that $\{\xi_t(\omega) : t = 1, \ldots, T\}$ are i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ distributed (univariate gaussian with 0 mean and variance 1).*

For a given $\theta \in \mathbb{R}$ Define

$$M_t(\theta) = \sum_{s=1}^{t}\{\exp(\theta\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2) - 1\}$$

This is a martingale with independent increments, and $\Delta M_t > -1$.
Then we set $Z_0(\theta) = 1$ and

$$Z_t(\theta) = \mathcal{E}(M(\theta))_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} Z_{s-1}(\theta)\Delta M_s = \prod_{s=1}^{t}\Big(1 + \exp(\theta\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2) - 1\Big) =$$
$$\prod_{s=1}^{t} \exp(\theta\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2) = \exp\Big(\theta\sum_{s=1}^{t}\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2 t\Big)$$

It follows that $Z_t(\theta)$ is integrable, since under P, the r.v. $\big(\sum_{s=1}^t \xi_s\big)$ is gaussian $\mathcal{N}(0,t)$. Since integrability is satisfied, $Z_t(\theta)$ is a P- martingale, which defines a probability measure $dQ_t(\theta) = Z_t(\theta)dP_t$ on $\mathcal{F}_t$.

Assume that M and N are square integrable P martingales, $\Delta M_t \geq -1$ and $Z_t = \mathcal{E}(M)_t, t = 1, \dots, T$ with $Z_T \in L^1(P)$ for all t.

By projecting N on M obtaining the orthogonal martingale decomposition

$$N_t = N_0 + (H \cdot M)_t + N_t^{\perp}$$

What happens to the martingale property of N and M under the new measure ?

Lause 3.4.1. *(Girsanov theorem in discrete time) The Doob decomposition of N under Q is given by*

$$N_t = N_0 + \big(H \cdot \langle M, M\rangle\big)_t + \big(H \cdot (M - \langle M, M\rangle)\big)_t + N_t^{\perp}$$

where $(M - \langle M, M\rangle)_t$ is a Q-martingale and $N^{\perp}$ is a martingale under both P and Q, and $(H \cdot \langle M, M\rangle)_t$ is a predictable process.

Proof From Bayes' formula of change of measure in conditional expectation,

$$E_Q(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \frac{E_P(Z_t\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1})}{E_P(Z_t|\mathcal{F}_{t-1})} = E_P\big(\Delta M_t \frac{Z_t}{Z_{t-1}}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) =$$
$$E_P\big(\Delta M_t\big(1 + \frac{\Delta Z_t}{Z_{t-1}}\big)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_P(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) + E_P((\Delta M_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \ 0 \ + \ \Delta\langle M, M\rangle_t$$

which means that $(M_t - \langle M, M\rangle_t)$ is a Q-martingale.

On the other hand

$$E_Q(\Delta N_t^{\perp}|\mathcal{F}_{t-1}) = E_P(\Delta N_t^{\perp}\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \Delta\langle N^{\perp}, M\rangle_t = 0$$

since $N^{\perp}$ and M are orthogonal martingales.

In example 3.4.1, we compute $\langle M(\theta), M(\theta)\rangle$, and find the law of (ξ_s) under the probability measure $Q_T(\theta)$.

Recall that the characteristic function of the gaussian distribution $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ is

$$\varphi_X(u) := E_{\mu,\sigma^2}(\exp(iuX)) = \exp\bigl(iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\bigr)$$

where $X(\omega)$ is $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-distributed and i is the imaginary unit.

Now we want to compute the characteristic function of the vector $\xi_1,\dots,\xi_t$ under the measure Q.

We have that for $u = (u_1,\dots,u_t) \in \mathbb{R}^t$

$$\begin{aligned}
&E_Q\bigl(\exp(i\sum_{s=1}^t u_s\xi_s)\bigr) = E_P\bigl(Z_t \exp(i\sum_{s=1}^t u_s\xi_s)\bigr) = \\
&E_P\biggl(\exp\biggl(\sum_{s=1}^t (iu_s+\theta)\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2 t\biggr)\biggr) = \\
&E_P\biggl(\exp\biggl(\sum_{s=1}^t i(u_s - i\theta)\xi_s + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^t (u_s - i\theta)^2\biggr)\biggr)\exp\biggl(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^t \{-(u_s-i\theta)^2 - \theta^2\}\biggr) = \\
&\prod_{s=1}^t E_P\biggl(\exp\biggl((u_s - i\theta)\xi_s + \frac{1}{2}(u_s-i\theta)^2\biggr)\biggr)\prod_{s=1}^t \exp(i\theta u_s - \frac{1}{2}u_s^2) \\
&= 1 \times E_P(\exp(i(\theta+\xi_s)u_s)
\end{aligned}$$

this means that the law under Q of ξ_s is the same as the law under P of $(\theta+\xi_s)$, i.e. under Q $(\xi_s : s = 1,\dots,t)$ are i.i.d. $\mathcal{N}(\theta,1)$.

3.5 Predictable representation property

Let M be a $(P,\mathbb{F})$-local martingale w.r.t. to a discrete time filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$.

We say that M has the representation property in the filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, if any other bounded $(P,\mathbb{F})$-martingale (X_t) can be represented as a constant plus a martingale transform w.r.t. M

$$X_t = X_0 + (Y\cdot M)_t = X_0 + \sum_{s=1}^t Y_s \Delta M_s$$

where (Y_t) is $\mathbb{F}$-predictable, that is Y_t is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable for all t.

Since X is a bounded martingale, also $\Delta M_s(\omega)$ is bounded on the set

$$\{\omega : Y_s(\omega) \neq 0\} \in \mathcal{F}_{s-1}$$

In particular if M has the martingale representation property in discrete time, necessarily $M_t(\omega) \in L^\infty(P)$, which implies $M_t \in L^2(P)\ \forall t \in \mathbb{N}$.

Note that this notation covers also the case of d-dimensional martingales. In such case (Y_s) is a d-dimensional predictable process, and

$$\sum_{s=1}^t Y_s \Delta M_s = \sum_{s=1}^t \sum_{i=1}^d Y_s^{(i)} \Delta M_s(i)$$

Lemma 3.5.1. *Let (M_t) be a $(P,\mathbb{F})$-local martingale.*

(M_t) has the predictable representation property in the $(\mathbb{F})$-filtration if and only if

the only bounded $(P,\mathbb{F})$-martingales (N_t) such that the product (M_tN_t) is a $(P,\mathbb{F})$-local martingale are constant.

Proof Assume that the PRP holds for M. Then every bounded martingale N has the form $N_t = (H \cdot M)_t$, and necessarily M_t is $\mathbb{F}$-locally square integrable. If N is such that (N_tM_t) is a local martingale, necessarily

$$\begin{aligned}&\Delta(M_tN_t) = M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \Delta M_t \Delta N_t = \\ &(M_{t-1}H_t + N_{t-1})\Delta M_t + H_t(\Delta M_t)^2\end{aligned}$$

This gives a contradiction, since

$$0 = E(\Delta(M_tN_t)|\mathcal{F}_{t-1}) = H_t E((\Delta M_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0$$

with positive probability unless either $\Delta M_t = 0$ or $H_t = 0$. This implies that N_t is constant. The same argument gives the opposite implication.

Teoreema 3.5.1. *In the discrete time setting, M has the martingale representation property in the filtration $\mathbb{F}$ if and only if there are no other martingale measures $Q \sim P$ with bounded density for (M_t), that is if $Q \sim P$, $Z(\omega) = \frac{dP}{dQ}(\omega)$ is essentially bounded and (M_t) is a also a $(Q,\mathbb{F})$-martingale, necessarly $Q = P$.*

Proof For simplicity we set $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Assume that $Q \sim P$. We know that $Z_t = Z_t(Q,P)$ is a $(P,\mathbb{F})$-martingale.

By the predictable representation property,

$$\Delta Z_t = Z_{t-1} H_t \Delta M_t$$

where H_t is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

We show that M is not a martingale under Q, unless $H_t = 0$.

$$E_Q(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_P\big(\Delta M_t \frac{Z_t}{Z_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_P\big(\Delta M_t\big(1+\frac{\Delta Z_t}{Z_{t-1}}\big)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) =$$
$$E_P\big(\Delta M_t\big(1+H_t\Delta M_t\big)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_P(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) + E_P(H_t(\Delta M_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) =$$
$$0 + H_t E_P((\Delta M_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0$$

unless $H_t = 0$ P-a.s. for all t. This means that $Z_t = 1$ for all t and $Q = P$.

Viceversa, suppose that the representation property does not hold for M in the filtration $\mathbb{F}$.

This means that there is some other bounded $(P, \mathbb{F})$-martingale N such that the product $(M_t N_t)$ is a martingale. We can take N satisfying $N_0 = 0$ and $|N_t| \leq 1$. It is a fact from martingale theory that a bounded martingale (N_t) has almost surely a limit.

Define the measure on $\mathcal{F}_t$

$$dQ_t = \left(1 + \frac{N_t}{2}\right) dP_t = Z_t(\omega) dP_t$$

Note that (Z_t) is a P-martingale with $0 < \frac{1}{2} \leq Z_t(\omega) \leq 3/2$ and $Z_0 = 1$, so that Q_t is a probabilty measure equivalent to P_t on $\mathcal{F}_t$.

We have that

$$M_t Z_t = M_t + \frac{(N_t M_t)}{2}$$

is a P-martingale since (M_t) and $(N_t M_t)$ are P-martingales. This means we have constructed another measure $Q_t \sim P_t$, with $Q_t \neq P_t$ such that (M_t) is a Q-martingale.

Esimerkki 3.5.1. *Consider a sequence of i.i.d. standard normal random variables (ξ_t) on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. with the filtration of σ algebrae $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_s : 1 \leq s \leq t)$.*

Define $M_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$. M_t is a P-martingale, since it has independent increments and centered. M_t is also square integrable, since the increments are gaussian. Note that $\mathcal{F}_t = \sigma(M_s : 1 \leq s \leq t)$.

Note that $\eta_t = (\xi_t^2 - 1)$ are also i.i.d. and centered, and $N_t = \sum_{s=1}^{t} \eta_s$ is also a P-martingale.

It follows that the product $(N_t M_t)$ *is a* P*-martingale,m since* $E_P(\xi_t \eta_t) = E_P(\xi_t^3 - \xi_t) = 0$.

The filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ *generated by* (M_t) *contains the* P*-martingale* (N_t) *which is is orthogonal to* (M_t)*. Neither* M *or* N *have the predictable representation property.*

We show that there exist an equivalent martingale measure for M*. Note that* $\Delta N_t = (\xi_t^2 - 1) > -1$ P*-almost surely.*

Therefore

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t}(1 + \Delta N_t) = 1 + \sum_{s=1}^{t} Z_{s-1}\Delta N_s > 0$$

defines an equivalent probability measure $dQ_t = Z_t dP_t$.

By Girsanov theorem, since $(M_t N_t)$ *is a* P*-martingale it follows that also* $(M_t Z_t)$ *is a* P*-martingale. But this means that* (M_t) *is a* Q*-martingale. So* $Q \sim P$ *but* $Q \neq P$ *is another martingale measure for* P.

In order to construct a bounded $(P, \{\mathcal{F}_t\})$*- martingale we can take the i.i.d. sequence of centered and bounded random variables*

$$\varepsilon_t := (\xi_t^2 \wedge 1) - E_P(\xi_t^2 \wedge 1) \in (-1, 1)$$

It follows that

$$\begin{aligned} &E_P(\xi_t \varepsilon_t) = E_P(\xi_t(\xi_t^2 \wedge 1)) - E_P(\xi_t)E_P(\xi_t^2 \wedge 1) = \\ &E_P(\xi_t \mathbf{1}(|\xi_t| > 1)) + E_P(\xi_t^3 \mathbf{1}(|\xi_t| \leq 1)) + 0 = 0 \end{aligned}$$

since the distribution ξ_t *is symmetric around 0.*

Therefore for any fixed T*, the process stopped at* T

$$X_t^T := \sum_{s=1}^{t \wedge T} \varepsilon_s$$

is a bounded P*-martingale orthogonal to* (M_t).

3.6 Application to hedging : Cox-Ross-Rubinsteinin binomi-puun malli

Consider the finite probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where $\Omega = \{0,1\}^T$, with $T < \infty$, and $\mathcal{F} = 2^\Omega$, the finite collection of all possible subset, and probability measure satisfies $P(\{\omega\}) > 0$ for all $\omega \in \Omega$.

An history is a vector $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega$ and denote $\omega^t = (\omega_1, \ldots, \omega_t)$ for $t \le T$.

Consider a market with a bank account B_t and a stock price S_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, adapted to the filtration $\mathbb{F}$ with $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega_s, s \le t)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$

We assume that there are $\{\mathcal{F}_t\}$-**predictable** processes $U_t(\omega) > R_t(\omega) > D_t(\omega) > -1$. $B_0 > 0$ and $S_0 > 0$ are determistic values, and we let

$$B_t = B_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + R_t),$$
$$S_t = S_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + D_t + \omega_t(U_t - D_t))$$

Suppose that $G(\omega)$ is a $\mathcal{F}_t$-measurable contingent claim, and we want to find a self-financing hedging strategy (β_t, γ_t) satisfying

$$V_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = \beta_{t+1} B_t + \gamma_{t+1} S_t \ .$$

We show first that there is an unique probability measure Q such that $Q \sim P$ and the discounted process $\widetilde{S}_t := (S_t/B_t)$ is a Q-martingale.

Once we have shown that Q is the unique martingale measure for $(\widetilde{S}_t)$ in the filtration $\mathbb{F}$, it follows that every $(Q, \mathbb{F})$ martingale (N_t) has the representation as

$$N_t = N_0 + \sum_{u=1}^{t} H_u \Delta \widetilde{S}_u$$

where (H_t) is a $\mathbb{F}$-predictable process. In particular we can take

$$\widetilde{V}_t = E_Q\left(\frac{G}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

and obtain when $t = T$

$$\widetilde{G}(\omega) = \frac{G(\omega)}{B_T} = \widetilde{V}_T = V_0 + \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \Delta \widetilde{S}_t$$

where (γ_t) is a $\mathbb{F}$-predictable process.

By using the discete integration by parts formula we obtain the hedging as follows:

$$\begin{aligned}
V_t = \widetilde{V}_t B_t &= \widetilde{V}_0 B_0 + \sum_{s=1}^{t} B_s \Delta \widetilde{V}_s + \sum_{s=1}^{t} \widetilde{V}_{s-1} \Delta B_s \\
&= V_0 + \sum_{s=1}^{t} B_s \gamma_s \Delta \widetilde{S}_s + \sum_{s=1}^{t} \frac{V_{s-1}}{B_{s-1}} B_{s-1} R_s \\
&= V_0 + \sum_{s=1}^{t} B_s \gamma_s \frac{1}{B_s} \big(S_s - (1+R_s) S_{s-1} \big) + \sum_{s=1}^{t} \big(V_{s-1} - \gamma_s S_{s-1} \big) R_s \\
&= V_0 + \sum_{s=1}^{t} \gamma_s \Delta S_s + \sum_{s=1}^{t} \beta_s \Delta B_s
\end{aligned}$$

where $\beta_s = (V_{s-1} - \gamma S_{s-1}) B_s^{-1}$. Note that the derivation above also in the case when B_t and R_t are just $\mathbb{F}$-adapted and not necessarily $\mathbb{F}$-predictable.

Note that (γ_s, β_s) is a self-financing and predictable strategy replicating the contingent claim, since for $t = T$.

$$V_T = G(\omega) = V_0 + (\gamma \cdot S)_T + (\beta \cdot B)_T$$

Note also that $\widetilde{V}_0 = E_Q\big(\frac{G}{B_T}\big)$, so that $V_0 = \widetilde{V}_0 B_0 = B_0 E_Q\big(\frac{G}{B_T}\big)$ the initial endowment of the replicating strategy, is the unique arbitrage free price.

Next we give an explicit formula for the hedging in the binary market case.

Lets' first compute the martingale measure Q.

$$\Delta \widetilde{S}_t = \left(\frac{S_t}{B_t} - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \right) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \left(\frac{(1 + D_t + (U_t - D_t)\omega_t)}{(1+R_t)} - 1 \right) =$$
$$\frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)} \big((U_t - D_t)\omega_t - (D_t - R_t) \big)$$

Taking conditional expectation with respect to a measure Q, and imposing the martingale property

$$E_Q(\Delta \widetilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)} \big((U_t - D_t) E_Q(\omega_t | \mathcal{F}_{t-1}) - (D_t - R_t) \big) = 0$$

which implies that Q is a martingale measure for $(\widetilde{S}_t)$ if and only if

$$q_t(\omega^{t-1}) := E_Q(\omega_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{(R_t - D_t)}{(U_t - D_t)},$$

where $q_t(\omega^{t-1}) \in (0,1)$ is a probability since we have assumed that $D_t < R_t < U_t$, P a.s, and it is uniquely determined. We define globally the unique risk-neutral measure Q as follows:

$$Q(\omega) = \prod_{t=1}^{T} q_t(\omega^{t-1})^{\omega_t}(1 - q_t(\omega^{t-1}))^{1-\omega_t}$$

and note that $Q(\{\omega\}) > 0$ for all $\omega \in \Omega$, therefore $Q \sim P$.

We define the basic Q-martingale

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\omega_s - q_s(\omega^{(s-1)})\big)$$

We write

$$\Delta\widetilde{S}_t = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)}(U_t - D_t)(\omega_t - q_t(\omega^{(t-1)})) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)}(U_t - D_t)\Delta M_t$$

and we can represent ΔM_t in terms of $\Delta\widetilde{S}_t$:

$$\Delta M_t = \frac{B_{t-1}(1+R_t)}{S_{t-1}(U_t - D_t)}\Delta\widetilde{S}_t$$

Next we show how to use the martingale representation to compute the hedging strategy for the contingent claim G. Denote $\widetilde{G}(\omega) = G(\omega)/B_T(\omega)$.

Määritelmä 3.6.1. *If $X(\omega)$ is a $\mathcal{F}_T$-measurable random variable, we define its discrete Malliavin derivative or stochastic gradient at time t w.r.t ω_t as*

$$\nabla_t X(\omega) := X(\omega_1,\dots,\omega_{t-1},1,\omega_{t+1},\dots\omega_T) - X(\omega_1,\dots,\omega_{t-1},0,\omega_{t+1},\dots\omega_T)\ ,$$

for $1 \le t \le T$.

Note that in general $\nabla_t X(\omega)$ is not $\mathcal{F}_t$ measurable unless the r.v. $X(\omega) = X(\omega^t)$ is $\mathcal{F}_t$-measurable. In such case $\nabla_t X(\omega)$ is also $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

In particular the following quantities are $\mathcal{F}_{T-1}$-measurable.

$$\nabla_T\widetilde{G}(\omega^{T-1}) = (\widetilde{G}(\omega^{T-1},1) + \widetilde{G}(\omega^{T-1},0)) \quad \text{and}$$
$$\nabla_T S_T(\omega^{T-1}) = (S_T(\omega^{T-1},1) + S_T(\omega^{T-1},0)) = S_{T-1}(U_T(\omega^{T-1}) - D_T(\omega^{T-1}))\ .$$
$$\nabla_T\widetilde{S}_T(\omega^{T-1}) = \frac{1}{B_T}\nabla_T S_T(\omega^{T-1})$$

Note also that

$$\Delta\widetilde{S}_T = (\widetilde{S}_T - \widetilde{S}_{T-1}) = \frac{S_{T-1}}{B_T}(U_T - D_T)(\omega_T - q_T) = \big(\nabla_T\widetilde{S}_T\big)(\omega_T - q_T)$$

so that we can write

$$\Delta M_T = (\omega_T - q_T(\omega^{T-1})) = \frac{1}{\nabla_T \widetilde{S}_T}\Delta \widetilde{S}_T = \frac{B_T}{\nabla_T S_T}\Delta \widetilde{S}_T$$

We have

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G}(\omega) = \widetilde{G}(\omega^{T-1},\omega_T) = \widetilde{G}(\omega^{T-1},0) + (\widetilde{G}(\omega^{T-1},1) - \widetilde{G}(\omega^{T-1},0))\omega_T = \\
&\widetilde{G}(\omega^{T-1},0) + \nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1})\omega_T = \\
&\widetilde{G}(\omega^{T-1},0) + \nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1})q_T + \nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1})(\omega_T - q_T) = \\
&E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \nabla_T \widetilde{G}\ \Delta M_T = E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T} B_T \Delta \widetilde{S}_T \\
&= E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}\Delta S_T - \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T} R_T S_{T-1} \\
&= E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}\Delta S_T - \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}\frac{S_{T-1}}{B_{T-1}}\Delta B_t
\end{aligned}$$

By investing at time $(T-1)$ the value

$$c_{T-1}(G) = E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) = \frac{E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1})}{1+R_T}$$

we replicate the contingent claim G as follows: we buy the amount of stocks

$$\gamma_T = \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}$$

at price $\gamma_T S_{T-1}$ (if $\gamma_T < 0$ we short-sell stocks) , if necessary by borrowing from the bank at the predictable interest rate R_T, and buy

$$\beta_T = \frac{1}{B_{T-1}}\Big(c_{T-1}(G) - \gamma_T S_{T-1}\Big)$$

bonds at price B_{T-1}.

Remark The martingale measure Q when it is unique gives a device to compute the price and hedging strategy. In fact the price hedging can be computed without using probability, once we have assumed that all histories $\omega \in \Omega$ have positive probability:

A direct way to compute the hedging without using martingales is to solve at time T the system of equations:

$$\begin{aligned}
G(\omega^{T-1},0) &= B_T\beta_T + \gamma_T S_{T-1}(1+D_T) \\
G(\omega^{T-1},1) &= B_T\beta_T + \gamma_T S_{T-1}(1+U_T)
\end{aligned}$$

By substracting these two equations we get

$$\gamma_T = \frac{\nabla_T G(\omega^{T-1})}{S_{T-1}(U_T - D_T)}$$

and if the two equations with respective weights $(1-q_T(\omega^{T-1}))$ corresponding to $\omega_T = 0$ and $q_T(\omega^{T-1})$ corresponding to $\omega_T = 1$ we obtain

$$\begin{aligned}\beta_T &= \frac{1}{B_T}\big(E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1}) - \gamma_T E_Q(S_T|\mathcal{F}_{T-1})\big)\\ &= \frac{1}{B_T}E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1}) - \gamma_T \frac{S_{T-1}}{B_{T-1}}\end{aligned}$$

combining these toghether we get the price of the contingent claim at time $(T-1)$:

$$c_{T-1}(G) = \beta_T B_{T-1} + \gamma_T S_{T-1} = \frac{1}{1+R_T}E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1})$$

The martingale method has the advantage that it gives a probabilistic interpretation to the price of the contingent claim, which can be computed directly as a Q-expectation.

The other reason is that the martingale method can be extended to the continuous-time setting.

The price and the hedging strategy in the whole time interval $t = 1, \dots, T$, is then obtained by induction:

Let $c_t(G)$ be the price of the contract G at time $t \le T$. This is a $\mathcal{F}_t$-measurable contingent claim. This means that are able to hedge the contingent claim G expiring at time T if and only if at time t we own a portfolio of value $c_t(G)$. By repeating the martingale argument or by writing directly the system of equations we find the price of the contract at time $(t-1)$ $c_{t-1}(G)$ and the replicating portfolio $\beta_t(\omega^{t-1}), \gamma_t(\omega^{t-1})$.

The advantage the martingale method is that enables to compute directly price and replicating strategy at all times t by computing Q-expectations.

The predictable representation property of the Q-martingale M gives

Teoreema 3.6.1. *Discrete Clarck-Ocone formula:*

$$\begin{aligned}E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega) &= E_Q(\widetilde{G}) + \sum_{s=1}^{t} \nabla_s E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_s)\big(\omega_s - q_s(\omega^{s-1})\big)\\ &= E_Q(\widetilde{G}) + \sum_{u=1}^{t} \frac{\nabla_u E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_u)}{\nabla_u \widetilde{S}_u}\,\Delta \widetilde{S}_u\end{aligned}$$

where by definition $\nabla_t E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_t)$ is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

We set

$$\gamma_t = \frac{\nabla_t E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_t)}{\nabla_t S_t}$$

By usiong integration by parts we obtain as before

$$V_t = V_{t-1} + \gamma_t \Delta S_t + \beta_t \Delta B_t$$

where

$$\beta_t = \left(\frac{E_Q(G|\mathcal{F}_{t-1})}{1+R_t} - \gamma_t S_{t-1} \right) \frac{1}{B_{t-1}}$$

In order to have $V_t = B_t E_Q(G\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_t)$ in our portfolio at time t we need to invest the amount

$$B_{t-1} E_Q(\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{at time } (t-1)\ .$$

Inductively , to have $G = B_T E_Q(\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_T)$ at time T we have to invest at time $s \le T$ the amount

$$c_t(G) = B_t E_Q(\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_t)$$

at time t.

The hedging at time $(t-1)$ is given by

$$\gamma_t = \frac{\nabla_t \big(B_t E_Q(\frac{G}{(}\omega) B_T|\mathcal{F}_t\big)}{\nabla_t S_t} = \frac{\nabla_t c_t(G)}{\nabla_t S_t},$$
$$\beta_t = \Big(c_{t-1}(G) - \gamma_t S_{t-1} \Big) \frac{1}{B_{t-1}}$$

giving

$$V_t = c_t(G) = c_0(G) + \sum_{u=1}^{t} \big(\gamma_u \Delta B_u + \beta_u \Delta B_u\big)$$
$$V_T = G = c_0(G) + \sum_{u=1}^{T} \big(\gamma_u \Delta B_u + \beta_u \Delta B_u\big)$$

When R_t is deterministic, we can take the discounting factors B_t/B_T outside the conditional expectation.

If (D_t, R_t, U_t) are all deterministic, then under the martingale measure Q the random variables ω_t is independent from the past. Then the computation of the hedging strategy may be simplified by using the following formula:

Seuraus 3.6.1. *If (D_t, R_t, U_t) are deterministic at all $t \le T$, conditional expectation and gradient commute in Ito-Clarck formula*

$$\nabla_t E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t) = E_Q(\nabla_t \widetilde{G}|\mathcal{F}_t)$$

giving

$$E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega) = E_Q(\widetilde{G}) + \sum_{s=1}^{t} E_Q(\nabla_s \widetilde{G}|\mathcal{F}_s)\big(\omega_s - q_s(\omega^{s-1})\big) \ .$$

Proof When $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$ we denote $\omega^{t,T}$ the vector $(\omega_t, \dots, \omega_T)$. Using the independence of the r.v. (ω_t),

$$E_Q(\nabla_t \widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega_t) = \sum_{\omega^{t+1,T} \in \{0,1\}^{T-t}} \big\{\widetilde{G}(\omega^{t-1}, 1, \omega^{t+1,T}) - \widetilde{G}(\omega^{t-1}, 0, \omega^{t+1,T})\big\} Q(\omega^{t+1,T})$$
$$= \nabla_t E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega_t)$$

which is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

Esimerkki 3.6.1. *Assume that $R_t = r, U_t = u, D_t = d$ deterministic, with $-1 < d < r < u$. Then $q_t = q = (r-d)/(u-d)$ is constant. We have that*

$$S_t = S_0(1+u)^{N_t}(1+d)^{t-N_t}$$

where $N_t = \sum_{s=1}^{t} \omega_s$.

Then if $G(\omega) = \varphi(S_T)$ is a plain european option, we compute the price at time $t = 0$ using the distribution Binomial(q, T).

$$V_0 = c_0(G) = B_0 E_Q(\varphi(S_T)/B_T) =$$
$$(1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \varphi\big(S_0(1+u)^n(1+d)^{T-n}\big) \ .$$

Similarly since the conditional distribution of $(N_T - N_t)$ given $\mathcal{F}_t$ is Binomial$(q, T-t)$, at time t the price of the replicating portfolio is

$$V_t = c_t(G) = B_t E_Q(\varphi(S_T)/B_T|\mathcal{F}_t) =$$
$$(1+r)^{t-T} \sum_{n=0}^{T-t} \binom{T-t}{n} q^n (1-q)^{T-t-n} \varphi\big(S_0(1+u)^{N_t+n}(1+d)^{T-N_t-n}\big) \ .$$

with this amount of money, we invest in γ_{t+1} *stocks and invest the rest in the bank account, with*

$$\gamma_{t+1} = \frac{\nabla_{t+1} c_{t+1}(G)}{\nabla_{t+1} S_{t+1}} = (1+r)^{t+1-T} \frac{E_Q(\nabla_{t+1} G | \mathcal{F}_t)}{S_t(u-d)} =$$

$$(1+r)^{t+1-T} \frac{1}{S_t(u-d)} \sum_{n=0}^{T-t-2} \left\{ \binom{T-t-2}{n} q^n (1-q)^{T-t-2-n} \times \right.$$

$$\left. \times \Big(\varphi\big(S_0(1+u)^{N_t+n+1}(1+d)^{T-N_t-n-2}\big) - \varphi\big(S_0(1+u)^{N_t+n}(1+d)^{T-N_t-n-1}\big) \Big) \right\}$$

Luku 4

Kohti jatkuvan ajan markkinamallia

Määritellään seuraavasti binomipuumallien jono:

Jaetaan aikäväli $[0, T]$ tasaisesti hilapisteilla Tk/N, jossa $k = 0, 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$. Olkoon

- $r_N > -1$ deterministinen jono jolla $R_N \to 0$ kun $N \to \infty$ $(1 + r_N)^N \to \exp(rT)$. Esimerkiksi $r_N = r/N$.
- $B_k^{(N)} = (1+r_N)^k B_0^{(N)}$ $k = 0, \dots, N$ on riskitön numerääri, jossa $B_0^{(N)} = 1$.
- $-1 < D_N < r_N < U_N$ ovat deterministisia jonoja jossa $D_N, U_N \to 0$.
- Olkoon $S_k^{(N)}$ $k = 0, \dots, N$ osake, tuotolla

  $$R_k^{(N)} = \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$$

  Oletamme että referenssi todennäköisyyden P:n suhteen

  $$-1 < D^{(N)} < R_k^{(N)}(\omega) < U^{(N)} \qquad (P = 1)$$

  Merkitään myös diskontattu osakeprosessi $\widetilde{S}_k^{(N)} = S_k^{(N)} / B_k^{(N)}$.

  Oletamme että on olemassa riskineutraali todennäköisyysmitta Q (joka on yksikäsitteinen kun $R_k^{(N)}$ ehdollisen jakauman supporti on kahden pisteen joukko),

  $$E_Q\big(\widetilde{S}_k^{(N)} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}^{(N)}\big) = \widetilde{S}_{k-1}^{(N)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

jossa $\mathcal{F}_k^{(N)} = \sigma(S_1^{(N)}, dots, S_k^{(N)})$.

Oletamme sen lisääksi että Q:n suhteen tuotot $R_k^{(N)}$ ovat riippumattomia, ja ja toteuttavat

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Var}_Q(R_k^{(N)}) \longrightarrow \sigma^2 \in (0,\infty) \quad \text{kun } N \to \infty$$

Teoreema 4.0.1. *Näillä oletuksilla $S_N^{(N)}(\omega)$ jakauman riskineutraali mitan Q:n suhteen suppenee kohti log-normaalista jakaumaa, eli jakauman mielessä kohti*

$$S_0 \exp\Big(G\sigma\sqrt{T} + \big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\big)T\Big)$$

jossa $G(\omega)$ gaussinen $E(G) = 0$, $E(G^2) = 1$.

Määritelmä 4.0.1. *Olkoon jokaiselle $N \in \mathbb{N}$, $X^{(N)}$ satunnaimuuttuja todennäköisyysavaruudella $(\Omega^{(N)}, \mathcal{F}^{(N)}, P^{(N)})$, ja X satunnaimuuttuja todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, Satunnaismuuttujen jono $X^{(N)}(\omega)$ suppenee jakauman mielessä kohti satunnaismuuttujan X:n jakaumaa, kun kakille jatkuville ja rajoitetuille testifunktiolle $f(x)$*

$$E_{P^{(N)}}\big(f(X^{(N)})\big) \longrightarrow E_P\big(f(X)\big)$$

Lemma 4.0.1. *Keskeinen raja-arvo lause: Olkoon kakille $N \in \mathbb{N}$ $(\xi_k^{(N)} : k = 1, \ldots, N)$ $P^{(N)}$-riippumattomien satunnaismuuttujen jono, jolla*

- $\mu^{(N)} := \sum_{k=1}^{N} E_{P^{(N)}}(\xi_k^{(N)}) \longrightarrow \mu$
- $\big(\sigma^{(N)}\big)^2 := \sum_{k=1}^{N} Var_{P^{(N)}}(\xi_k^{(N)}) \longrightarrow \sigma^2 \in (0,\infty)$
- $|\xi_k^{(N)}(\omega)| \leq c^{(N)} \longrightarrow 0$

jossa $c^{(N)}$ on deterministinen jono.

Silloin

$$X^{(N)} := \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Big(\mu + G(\omega)\sqrt{\sigma}\Big)$$

jossa konvergenssi on jakauman mielessä ja $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ (standardi gaussinen)

Lauseen todistus Taylorin kehitelmä

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(1+\xi)}^2\right)x^2 =$$
$$x + \frac{1}{2}\frac{d^2\log(1+x)}{dx^2}\bigg|_{x=\xi} x^2 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi^2}x^2$$

jossa $\xi = \xi(x)$, $0 \le \xi \le x$ vai $-1 < x \le \xi \le 0$.

Tästä seuraa $\forall d \le x \le u$,
$\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi^2}x^2 \le \Delta(d,u) := d^2 \vee u^2 \longrightarrow 0$ kun $d, u \longrightarrow 0$.

$$\log(S_N^{(N)}) = \log(S_0) + \sum_{k=1}^{N} \log(1 + R_k^{(N)})$$
$$\log(S_N^{(N)}) = \log(S_0) + \sum_{k=1}^{N}\left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right) + O(|u^{(N)}| \vee |d^{(N)}|\ )\sum_{k=1}^{N}(R_k^{(N)})^2$$

Nyt

$$E\left(\sum_{k=1}^{N}(R_k^{(N)})^2\right) = N(r^{(N)})^2 + \sum_{k=1} \mathrm{Var}(R_k^{(N)})$$
$$= N^{-1}r^2T^2 + (\sigma^{(N)})^2$$

$$E_{Q^{(N)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right)\right) = rT - \frac{1}{2}N^{-1}r^2T^2 + (\sigma^{(N)})^2 \to Nr^{(N)} - \frac{1}{2}$$

4.1 Jatkuva aika, integrointi ja arbitraasi

Olkoon $(S_t : t \in \mathbb{R}^+)$ osake prosessi, numeräärillä $B_t \equiv 1$. Olkoon $f(x)$ jolla on olemassa derivaatta $f\prime(x)$ melkein kaikilla x

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\prime(y)dy$$

Silloin Jos $t \mapsto X_t$ on ja ei-vähenevä

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{X_0}^{X_t} f\prime(u)du = f(X_0) + \int_0^t f\prime(X_s)dX_s$$

Esimerkiksi kun $f(x) = (t-a)^+,\ f\prime(x) = \mathbf{1}(x > a)$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{X_0}^{X_t} \mathbf{1}(u > a) du = f(X_0) + 0^t \mathbf{1}(X_s > a) dX_s$$

$$(S_T - k)^+ = (S_0 - k)^+ + \int_0^T \mathbf{1}(S_t \geq k) dS_t$$

Luku 5

Korkorakenne mallit

Olkoon riskitön intrumentti $B_t = B_0 \exp\left(\int\limits_0^t r(s)ds\right)$ jolla $dB(t) = B(t)r(t)dt$,

ja $Q \sim P$ riskineutraali hinnoitelumitta optioille. Referenssina on "objektiivinen" todennäköisyys P.

Tässä $r(t,\omega)$ on $\mathbb{F}$-sopiva stokastinen prosessi, joka kutsutaan lyhyeksikoroksi (short rate). Kun $F(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, option hinta hetkellä $0 \le t \le T$ on

$$c_t(F) = E_Q\left(F\frac{B(t)}{B(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right) = E_Q\left(F\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\bigg|\mathcal{F}_t\right) .$$

Tarkastellään sopimus $F(\omega) \equiv 1$ joka maksaa 1€ lunastushetkellä T. Selläisiä sopimuksia kutsutaan *obligaatioksi, velkakirjaksi* tai *bondiksi.*

Hetkellä t obligaatiolla on hinta

$$p(t,T) = E_Q\left(\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\bigg|\mathcal{F}_t\right)$$

Huomataan että $p(t,t) \equiv 1,\ \forall t$

Märitellään obligaation spot-korko maturiteetilla T:

$$r(t,T) := -\frac{\log p(t,T)}{T-t} = \frac{\log p(t,t) - \log p(t,T)}{T-t}$$

Huomataan myös että

$$r(t,t) = \lim_{T\downarrow t} r(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T)\bigg|_{T=0} = \lim_{T\downarrow t}\frac{1}{T-t}E_Q\left(\int_t^T r(s)ds\bigg|\mathcal{F}_t\right) =$$
$$E_Q\left(\lim_{T\downarrow t}\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds\bigg|\mathcal{F}_t\right) = r(t)$$

Määritellään obligaation etuperäinen korko (forward rate)

$$f(t,T) := -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T)$$

josta seuraa $f(t,t) = r(t)$.

Määritelmästä seuraa suoraan

$$p(t,T) = p(t,t)\exp\Big(-\int_t^T f(t,u)du\Big) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)du\Big)$$

Käsitellään diskontattu obligaatio numeräärilla B_t:

$$\widetilde{p}(t,T) := \frac{p(t,T)}{B_t} = \exp\Big(-\int_0^t r(u)du\Big)E_Q\Big(\exp\Big(-\int_t^T r(u)du\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big)$$
$$= E_Q\Big(\exp\Big(-\int_0^T r(u)du\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big)$$

joka on automaattisesti martingaali hinnoitelumitan Q:n suhteen.

Oletamme että $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$ on d-ulotteinen Brownin liike hinnoitteilu mitan Q suhteen riippumattomilla komponentteilla, joka virittää filtraatiota $\mathbb{F}$. Huomataan että kun $r(u) \geq 0$,

$$F(\omega) = \exp\Big(-\int_0^T r(u)du\Big) \in (0,1]\ ,$$

muuten oletamme $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, Q)$.

Koska Brownin liikkeen filtraatiolla on martingaalin esitylksen ominaisuus on olemassa prosessi

$$H_s(\omega) = \big(H_s^{(1)}(\omega), \dots, H_s^{(d)}(\omega)\big) \in L_a^2(\Omega \times [0,T], Q(d\omega) \times dt; \mathbb{R}^d)$$

jolla

$$\widetilde{p}(t,T) = \widetilde{p}(0,T) + \sum_{i=1}^d \int_0^t H^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)} = \widetilde{p}(0,T) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \widetilde{p}(s,T)\sigma^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)}$$

jossa

$$\sigma_s^{(i)} = \frac{H^{(i)}(s,T)}{\widetilde{p}(s,T)}$$

on hyvin määritelty koska $\widetilde{p}(s,T) > 0$.

Koska kiinteällä T $\widetilde{p}(t,T)$ on lineaarisen stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisu, seuraa

$$\widetilde{p}(t,T) = \widetilde{p}(0,T)\exp\left(\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \sigma^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \big(\sigma^{(i)}(s,T)\big)^2 ds\right)$$

Seuraa osittaisintegroinnilla

$$p(t,T) = \widetilde{p}(t,T)\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) = p(0,T) + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t p(s,T)\sigma^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)} + \int_0^t p(s,T)r(s)ds$$

ja ratkaisemalla lineaarista stokastista differentiaaliyhtälöä

$$p(t,T) = p(0,T)\exp\left(\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \sigma^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)} + \int_0^t \left\{r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sigma^{(i)}(s,T)^2\right\}ds\right)$$

Tästä saan stokastisen integraalin esitykesen etuperäisille koroille

$$\begin{aligned}
&f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log p(0,T) \\
&-\frac{\partial}{\partial T}\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \sigma^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)} - \frac{\partial}{\partial T}\int_0^t \left\{r(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sigma^{(i)}(s,T)^2\right\}ds \\
&= f(0,T) - \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial T}^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)} + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \sigma^{(i)}(s,T)\frac{\partial\sigma}{\partial T}^{(i)}(s,T)ds
\end{aligned}$$

Voidaan myös mallintaa suoraan etuperäisia korkoja $f(t,T)$ seuraavasti:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t b(s,T)ds + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t a^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)}, \quad \forall T > 0.$$

jossa $\forall T$, $b(s,T), a^{(i)}(s,T)$ ovat sopivia prosesseja. Arbitraasivapaus ehto rajoittaa prosessien $b(s,T), a^{(i)}(s,T)$ valintaa, koska

$$\widetilde{p}(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du - \int_0^t r(s)ds\right)$$

pitää olla Q martingaali aikaparametrilla t, jokaiselle $T > 0$.

Merkitään

$$X(t,T) = \int_t^T f(t,u)du$$

ja lasketaan sen stokastisen differentiaali $d_t X(t,T)$ (aikaparametrin t:n suhteen).

Saadaan

$$\int_t^T f(t,u)du - \int_0^T f(0,u)du =$$
$$-\int_0^t f(u,u)ds + \int_0^t \Big(\int_s^T b(s,u)du\Big)ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\Big)dW_s^{(i)}$$

jossa vaihdettiin integroinnin järjestyssä. Stokastisen Fubinin lauseen perustella se on sallittu kun jompikumpi stokastinen integraali on olemassa $L^2(P)$-mielessä.

Nyt käytetään martingaalin ehtoa: osittaisintegroinnilla ja Iton kaavan perusteella, koska $f(s,s) = r(s)$,

$$\widetilde{p}(t,T) = \exp\Big(-X(t,T) - \int_0^t r(s)ds\Big) = \widetilde{p}(0,T) - \int_0^t \widetilde{p}(s,T)r(s)ds$$
$$-\int_0^t \widetilde{p}(s,T)d_s X(s,T) + \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{p}(s,T)d[X(\cdot,T),X(\cdot,T)]_s$$
$$= \widetilde{p}(0,T) + \int_0^t \widetilde{p}(s,T)\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\Big)^2 - \int_s^T b(s,u)du\Big\}ds$$
$$-\sum_{i=1}^d \int_0^t \widetilde{p}(s,T)\Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\Big)dW_s^{(i)}$$

jossa $\widetilde{p}(0,T) = p(0,T)$. Koska $\widetilde{p}(t,T)$ on Q-martingaali,

$$\int_s^T b(s,u)du = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\Big)^2 \quad \forall s,T$$

Derivoimalla T:n suhteen saadaan Heath-Morton-Jarrow ehdot:

$$b(s,T) = \sum_{i=1}^d a^{(i)}(s,T)\Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\Big) \quad \forall s,T$$

Eli volatiliteetti vektori $a(s,T)$ määärä driftia $b(s,T)$. Nämä tulokset pätevät myös kun riippumattomien Brownin liikkeiden määrä on $d = +\infty$.