Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2014
Harjoitus 9

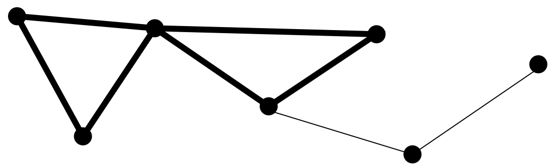
Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 26.3.2014
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 9.4.2014

1.* Olkoon $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$, missä

- $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ja
- $(a, b) \in R^{\mathcal{M}}$ joss a jakaa b:n.

Minkä joukon kaava
a) $\exists x(R(x, y) \wedge \neg x = y)$
b) $\exists y(R(x, y) \wedge \neg x = y)$
määrittelee mallissa?

2. Anna kaava, joka mielivaltaisessa verkossa määrittelee verkon 3-syklien viivoista koostuvan relaation. 3-sykli koostuu kolmesta pisteestä, joista jokaisesta on viiva kahteen muuhun saman syklin pisteeseen (eli kolmio). On siis määriteltävä relaatio, joka on viivarelaation alirelaatio, mutta johon kuuluu vain 3-syklien viivat. Esimerkiksi allaolevasta verkosta on määriteltävä lihavoiduista viivoista koostuva relaatio.



Seuraavia tehtäviä varten lue kurssimateriaalin luku 2.10 sijoituksesta.

3. Mitkä annetuista termeistä ovat vapaita muuttujalle y kaavassa $\exists x R_0(y, x) \wedge P_1(y)$?
a) x
b) c
c) y
d) z

4. Miksi annetuista muuttujista voidaan sidottu muuttuja x vaihtaa kaavassa $\exists x R_0(x, z) \wedge \exists y R_1(z, y)$:
a) z
b) y
c) x

5.* Onko termi t vapaa muuttujalle x kaavassa A, kun
a) $t = x$ ja $A = \exists x R(x, y)$
b) $t = x$ ja $A = \exists y R(x, y)$
c) $t = y$ ja $A = \exists y R(x, y)$
d) $t = z$ ja $A = \exists z P(z) \wedge R(x, y)$
e) $t = z$ ja $A = \exists z P(z) \wedge R(x, z)$
Jos sijoitus on sallittu, mikä on $A(t/x)$?

6.* Todista seuraava erikoistapaus sijoituslemmasta (engl. Substitution Lemma): Olkoon A kaava $\forall z(R_0(y,z) \to P_0(z))$. Valitaan termiksi t muuttuja x. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla $\mathcal{M}$ ja s:
   a) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
   b) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, missä $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$.

7. Todista sijoituslemma: Olkoon A mielivaltainen kaava ja t mielivaltainen termi. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla $\mathcal{M}$ ja s:
   a) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
   b) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, missä $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$.

Seuraavia tehtäviä varten lue kurssimateriaalin luku 2.11 päättelystä (universaalikvanttori.

8. Päättele lause $\forall x R_0(x,x)$ lauseesta $\forall x \forall y R_0(x,y)$.

9. Päättele lause $\neg\forall x P_0(x)$ lauseesta $\forall x \neg P_0(x)$.

10. Anna luonnollinen päättely lauseelle “Jos jokainen on huvittunut ja väsynyt, niin jokainen on huvittunut ja jokainen on väsynyt.”

11. Onko seuraava päättely korrekti:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x R_0(x,y)}{R_0(z,y)}\ \forall\,\mathbf{E}}{\forall y R_0(z,y)}\ \forall\,\mathbf{I}$$

12. Onko seuraava päättely korrekti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P_0(x)}{P_0(x)}\ \forall\,\mathbf{E} \qquad \dfrac{\forall x P_1(x)}{P_1(y)}\ \forall\,\mathbf{E}}{P_0(x) \wedge P_1(y)}\ \wedge\,\mathbf{I}}{\forall x(P_0(x) \wedge P_1(y))}\ \forall\,\mathbf{I}}{\forall y \forall x(P_0(x) \wedge P_1(y))}\ \forall\,\mathbf{I}$$

13. Päättele lause $\forall x P_1(x)$ lauseista $\forall x P_0(x)$ ja $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.

Ylimääräinen tehtävä. Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

14. a) Päättele $(\forall x P_0(x) \vee \forall x P_1(x)) \to \forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$.
    b) Osoita, että $\forall x P_0(x) \vee \forall x P_1(x)$ ei ole lauseen $\forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$ looginen seuraus. (Kunhan todistamme eheyslauseen predikaattilogiikalle, tämä osoittaa, ettei a-kohdan implikaatiota voida korvata ekvivalenssilla.)