Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2014
Harjoitus 10

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 2.4.2014
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 23.4.2014

Lue kurssimateriaalin luku 2.12 luonnollisesta päättelystä (eksistenssikvanttori).

1. Päättele lause
$$\forall x \exists y R_0(x, y) \wedge \forall x \exists y R_1(x, y)$$
lauseesta
$$\forall x \exists y (R_0(x, y) \wedge R_1(x, y)).$$

2. Anna luonnollinen päättely lauseelle: “Jos joku on onnellinen miljonääri, niin joku on onnellinen."

3. Päättele lause
$$\neg(\forall x P_0(x) \wedge \exists x \neg P_0(x)).$$

4.* Päättele lause
$$\forall x \exists y (R_0(x, y) \wedge R_1(y, x)) \rightarrow \forall u \exists v (R_0(u, v) \vee R_1(v, u)).$$

5. Päättele lause $\neg \exists y P_0(y) \rightarrow \neg P_0(c)$.

6. Päättele kaava $\forall x \exists z \exists y A \rightarrow \exists y \exists z A(c/x)$.

7. Päättele kaava $\forall x \exists y (\neg R_0(x, y) \wedge R_1(x, y)) \rightarrow \exists x \exists y \neg R_0(x, y)$.

8.* Päättele $\exists y B(y/x)$ kaavoista $\forall x(A \rightarrow B)$ ja $\exists x A$, jos y on vapaa x:lle ja y ei esiinny vapaana kaavassa B.

9. Päättele $\exists x P_0(x) \rightarrow \exists y P_1(y)$ kaavasta $\exists y \forall x (P_0(x) \rightarrow P_1(y))$.

Seuraavia tehtäviä varten lue kurssimateriaalin luku 2.14 eheydestä.

10. Osoita, että kaavasta $\exists x R_0(x, c)$ ei voi päätellä kaavaa $\exists x R_0(c, x)$.

11.* Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä luonnollisella päättelyllä:
$$\exists x \neg P_0(x) \rightarrow \neg \exists x P_0(x)$$

12. Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä luonnollisella päättelyllä:
$$\forall z (\forall x R_0(x, x) \rightarrow \forall y R_0(z, y))$$

13. Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä luonnollisella päättelyllä:
$$\exists x \forall y R_0(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R_0(x, y)$$

14.* Osoita, että seuraavaa lausetta ei voi päätellä luonnollisella päättelyllä:

$$\forall x(P_0(x) \to \forall y P_0(y))$$

15. Osoita, että ei ole olemassa luonnollista päättelyä:

$$\{\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x)), \forall x P_1(x)\} \vdash \forall x P_0(x)$$

16. Osoita, että ei ole olemassa luonnollista päättelyä:

$$\{\forall x(P_0(x) \to P_1(x)), \exists x P_0(x)\} \vdash \forall x P_1(x)$$

Ylimääräinen tehtävä. Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Päättele lause: “On olemassa joku siten, että jos hän on juoppo, niin jokainen on juoppo."Vihje: On pääteltävä lause $\exists x(P_0(x) \to \forall x P_0(x))$. Ajattele (esimerkiksi) seuraavasti: Jos on jokin x jolle $\neg P_0(x)$, niin tälle x pätee $P_0(x) \to \forall x P_0(x)$. Jos taas ei ole sellaista x jolle $\neg P_0(x)$, niin saadaan helposti $\forall x P_0(x)$ ja jälleen $P_0(x) \to \forall x P_0(x)$.