Logiikka I

Jouko Väänänen
Helsingin Yliopisto
Amsterdamin Yliopisto
myös videona[1]

12. maaliskuuta 2014

[1] http://mathstat.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/

Sisältö

Luku 1

Propositiologiikka

1.1 Johdanto

Tervetuloa *Logiikka I* kursille. Tämän kurssin aikana opimme logiikan perusteet. Kurssi on jaettu luentoihin, ratkaistuihin tehtäviin ja tehtäviin joita voit itse ratkoa kotona. Kurssi korostaa logiikan peruskäsitteiden oppimista ja menetelmiä joita voi käyttää ratkoessa logiikan tehtäviä.

Tällä luennolla aloitamme ensimmäisen tämän kurssin kahdesta aiheesta, nimittäin propositiologiikan. Propositiologiikka on menetelmä, jolla ymmärrämme miten sanoja “ja”, “tai”, “ei”, jne käytetään arkikielessä ja tieteessä. Kurssin aikana löydämme järjestelmällisiä tapoja tarkistaa, onko väite jossa käytetään näitä ns. konnektiiveja korrekti vai ei.

On tärkeää ymmärtää, että suurin osa kielestä, oli se sitten jokapäiväistä tai tieteellistä, käyttää myös muita loogisia käsitteitä kuin yllä mainitut konnektiivit. Joten kun keskitymme sanoihin “ja”, “tai”, “ei” jne, yksinkertaistamme radikaalisti. Tämä on kuitenkin erittäin käytännöllinen yksinkertaistus! Myöhemmin tämän kurssin aikana opimme, miten käsittelemme monimutkaisempia lauseita.

Logiikkaa käytetään nykyään laajalti elektronisessa maailmassa. Internet, tietokoneet, matkapuhelimet jne kaikki pohjautuvat logiikkaan. Jossain määrin logiikka on ihmisten ja tietokoneiden yhteinen kieli, mahdollisesti jopa ainoa yhteinen kieli. Täten ei ole yllättävää, että logiikalla ei ole tärkeä asema vain matematiikassa ja filosofiassa, vaan myös tietojenkäsittelytieteessä.

1.2 Propositiolauseet

1.2.1 Johdanto

Nyt selitämme käsitteen *propositiolause*. Intuitiivisesti propositiolause on väite, jonka kuvailee jotakin ilmiötä tai asiaa ja joka voidaan ajatella olevan tosi tai epätosi. Tässä on joitain esimerkkejä:

- $x < 10$
- $x < 10 \to x^2 < 100$
- $(x = 10 \wedge y = 12) \wedge (z = 4 \vee z = 5)$
- Sataa tai paistaa.

Ensimmäiset kolme ovat esimerkkejä luonnollisten lukujen aritmetiikasta ja ovat tosia tai epätosia riippuen siitä mitä x, y ja z ovat. Viimeinen esimerkki taas on luonnollisesta kielestä ja on tosi tai epätosi riippuen yksinkertaisesti säästä.

Kaikki lauseet eivät kuitenkaan ole propositiolauseita. Esimerkiksi

- $x + 10$
- $sin(x)$
- Lupaan, että hän tulee.
- Lopeta tuo!

Ensimmäiset kaksi ovat matemaattisia lausekkeita ja vaikka niillä on arvo riippuen siitä minkä arvon x saa, ne eivät koskaan ole tosia tai epätosia. Kolmas lause on tosiaan lause, mutta sekään ei ole propositiolause, sillä se ei ole tosi tai epätosi, toisaalta “Lupasin että hän tulee” olisi. Viimeinen esimerkki on myös lause, mutta sekään ei ole tosi tai epätosi lause.

1.2.2 Atomilauseet

Annamme nyt matemaattisen määritelmän propositiolauseelle. Tämän hyöty on siinä, että voimme käyttää matemaattisia keinoja tutkiessamme tällaisia kaavoja. “Matemaattinen määritelmä” tässä yhteydessä tarkoittaa käytännössä samaa kuin “tarkka määritelmä”. Kun kieli määritellään tarkasti siitä tulee muodollista kieltä jota kukaan ei juurikaan käytä, paitsi tietokoneet, kun ne “ajattelevat”.

Yksinkertaisemmat propositiolauseet ovat *propositiosymboleja*

$$p_0, p_1.p_2, ...$$

Kutsumme näitä propositiosymboleja myös *atomilauseiksi*.

Kun katsomme matemaattisia lauseita kuten

jos $x < 10$ niin $x > 5$ ja jos ei $x < 10$ niin $x > 15$,

niin atomilauseet ovat $x < 10$, $x > 5$ ja $x < 15$. Nämä atomilauseet voitaisiin helposti vaihtaa symboleihin p_0, p_1 ja p_2. Ei ole mitään väliä, mitä p_n käytämme, kuhan olemme järjestelmällisiä. Kun korvaamme $x < 10$ symbolilla p_1, menetämme tietoa, koska selvästi $x < 10$ kertoo meille enemmän kuin p_1. Tämä tiedon menetys on olennaista propositiologiikassa. Menettämällä tietoa saamme vapautta, mikä on hyödyllistä, kuten tulemme näkemään. Joten ei kannata huolestua vaikka näkee tiedon katoavan kun siirrymme matemaattisesta kielestä muodolliseen propositiologiikan kieleen.

Seuraavassa lauseessa

Jos sataa, niin tuulee
ja jos tuulee, niin tulee pilvistä.

atomilauseet ovat “sataa”, “tuulee” ja “tulee pilvistä”. Ne ovat atomilauseita koska niitä ei voida lyhentää tai tehdä yksinkertaisemmiksi. Propositiologiikan näkökulmasta nämä kolme atomilausetta voidaan korvata symboleilla p_0, p_1, ja p_2 ja mikään ei juuri muuttuisi.

Tässä vaiheessa moni ihmettelee miten voi ottaa niin konkreettisia lauseita kuten “tuulee” tai “sataa” ja korvata ne teknisillä sisällyksettömillä symboleilla ja silti väittää että lause kertoo meille jotain. Tervetuloa propositiologiikan maailmaan! Vaikka lauseesta puuttuu alkuperäiset sanat ja siinä on pelkkiä symboleja, näemme lauseen loogisen rakenteen.

1.2.3 Propositiologiikan symbolikieli

Propositiologiikan symbolit ovat:

Negaatio	$\neg$	ei
Konjunktio	$\wedge$	ja
Disjunktio	$\vee$	tai
Implikaatio	$\rightarrow$	jos...niin...
Ekvivalenssi	$\leftrightarrow$	...jos ja vain jos...

Nämä ovat niin sanottuja konnektiiveja. Niitä käytetään kun tehdään atomilauseista monimutkaisempia propositiolauseita. Luonnollinen kieli käyttää näitä pieniä sanoja jatkuvasti, joten meillä on aika hyvä ymmärrys siitä mitä ne tarkoittavat. Tästä riippumatta aiomme määritellä ne matemaattisesti, jotta voimme tutkia monimutkaisia propositiolauseita.

On myös muita konnektiiveja, kuten “mutta”, “ellei”, jne., mutta me keskitymme yllä mainittuihin tärkeimpiin. On myös olemassa sanoja jotka vaikuttavat konnektiiveiltä mutta eivät itse asiassa ole, kuten “mahdollisesti” tai “kunnes”. Käsittelemme myöhemmin kysymystä, miksi näitä sanoja ei voida käsitellä samalla tavalla kuin yllä mainittuja konnektiiveja. Sulkumerkkejä (,) käytetään selkeyden vuoksi.

Esimerkissä

jos $x < 10$, niin $x > 5$ ja jos ei $x < 10$, niin $x > 15$

näemme kaksi implikaatiota, yhden negaation ja yhden konjuntion.

Esimerkissä

Jos sataa, niin tuulee
ja jos tuulee, niin tulee pilvistä.

näemme yhden konjunktion ja kaksi implikaatiota.

1.2.4 Propositiologiikan symbolikieli (jatkoa)

Olemme nyt valmiita antamaan tarkan määritelmän propositiolauseille. Propositiolauseet ovat seuraavaa muotoa

$$
\begin{gathered}
p_n \\
\neg A \\
(A \wedge B) \\
(A \vee B) \\
(A \rightarrow B) \\
(A \leftrightarrow B),
\end{gathered}
$$

missä A ja B ovat propositiolauseita. Huomaa, että sulkuja käytetään kaikissa muissa tilanteissa paitsi negaatiossa.

Tämä on induktiivinen määritelmä siinä mielessä että rakensimme propositiolauseemme aloittamalla symboleista $p_0, p_1, ...$ ja soveltamalla niihin propositiologiikan symboleita, $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$. Jos meillä on propositiolauseet A ja B jotka on tuotettu tällä tavalla, voimme luoda uusia propositiolauseita lisäämällä negaation, konjunktion, disjunktion, implikaation tai ekvivalenssin. Mitään muita propositiolausetta ei ole, ne kaikki luodaan tähän tapaan.

1.2.5 Sulkumerkit

Sulkumerkkien rooli on osoittaa prioriteetteja ja auttaa välttämään epäselvyyksiä. Esimerkiksi, $(A \wedge (B \vee C))$ merkitsee aivan eri asiaa kuin $((A \wedge B) \vee C)$. Ensin mainittu on konjunktio kun taas jälkimmäinen on disjunktio. Tämän takia emme salli propositiolauseita $A \wedge B \vee C$ tai $A \rightarrow B \rightarrow C$. Sopivalla sulkumerkkien käytöllä jälkimmäisestä voi tulla joko $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ tai $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$. Muita epäselviä propositiolauseita ovat $A \rightarrow B \wedge C$ ja $A \vee B \rightarrow C$.

Tästä huolimatta on myös sulkumerkkejä jotka ovat turhia. Määritelmästämme johtuen propositiolauseissa enemmän sulkumerkkejä kuin käytännössä tarvitaan, ja siksi teemme seuraavan sopimuksen sulkumerkeistä:

Sulkumerkit jätetään pois elleivät ne ole tarpeellisia lauseen merkityksen säilyttämisen kannalta. Niinpä $A \wedge B \wedge C$ tarkoittaa joko $((A \wedge B) \wedge C)$ tai $(A \wedge (B \wedge C))$.

Syy, miksi yleensä ei tarvitse tehdä eroa $((A \wedge B) \wedge C)$:n ja $(A \wedge (B \wedge C))$:n välillä on se, että kun annamme kohta propositiolauseille täsmällisen sisällön, huomaamme että mainituilla lauseilla ei ole käytännössä eroa. Toisin sanoen, molemmat tarkoittavat, että A, B ja C ovat kaikki tosia.

Jos jostain syystä on tärkeätä erottaa puhummeko $((A \wedge B) \wedge C)$:stä vai $(A \wedge (B \wedge C))$:stä, voimme tehdä sen jättämällä sulkumerkit paikoilleen.

Usein jätämme myös ulommaiset sulkumerkit merkitsemättä, yksinkertaisuuden vuoksi.

1.2.6 Esimerkkejä

Tässä on joitain esimerkkejä propositiolauseista.

- Disjunktio: $p_0 \vee p_1$. Tämä on niin yksinkertainen propositiolause kuin voi keksiä, pelkkiä atomilauseita lukuun ottamatta. Huomaa että olemme jättäneet sulut pois, kuten sovimme. Eli virallisesti kaava on $(p_0 \vee p_1)$.

- Implikaatio disjunktion ja atomilauseen välillä: $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$. Intuitiivisesti kaava väittää, että jos joko p_1 tai p_2 on totta niin sitten p_3 on myös totta. Koska emme ole vielä määritelleet propositiolauseiden tarkkaa sisältöä, voimme antaa tälle propositiolauseelle vain intuitiivisen merkityksen jonka saamme sanoista “tai” ja “jos...niin...”. Kun määrittelemme propositiolauseet matemaattisesti, käy ilmi että olemme jotakuinkin oikeassa intuitiivisella määritelmällämme. Matemaattisessa määritelmässämme käy ilmi myös jotain muuta melko kiinnostavaa, mutta nyt menemme liian paljon eteenpäin.

- Disjunktion negaatio: $\neg(p_1 \vee p_2)$. Lauseen intuitiivinen merkitys on, että ei ole niin, että p_1 tai p_2 pitää paikkansa. Huomaa, että puhuessamme käytämme intonaatiota ilmaistaksemme mihin sulut menevät. Jos kaava olisi $\neg p_1 \vee p_2$, niin sen intuitiivinen merkitys olisi että p_1 **ei pidä** paikkaansa tai p_2 **pitää** paikkansa.

- Konjunktio atomilauseesta ja kahden atomilauseen disjunktiosta: $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$. Kun luemme kaavan, luemme myös sulkumerkit. Lisäksi, kun sanomme intuitiivisen merkityksen me saatamme joutua selittämään tarkemmin mitä tarkoitamme koska intonaatio ei aina riitä. Joten voimme sanoa: Lauseen intuitiivinen merkitys on, että p_0 on tosi, ja lisäksi joko p_1 tai p_2 on tosi.

- Implikaation negaatio: $\neg(p_3 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$. Tämän lauseen intuitiivinen merkitys on, että ei ole niin, että jos p_3 on tosi, niin jos p_2 on tosi, niin p_1 on tosi. Ei kannata teeskennellä, että tätä on oikeasti helppo

p_n	Prropositiosymboli
$\neg A$	Negaatio
$(A \wedge B)$	Konjunktio
$(A \vee B)$	Disjunktio
$(A \to B)$	Implikaatio
$(A \leftrightarrow B)$	Ekvivalenssi

Kuva 1.1: Propositiolauseita

ymmärtää! Implikaatio ja negaatio ovat monimutkaisia toimintoja ymmärtää, varsinkin kun ne esiintyvät yhdessä.

- Neljän kaavan disjunktio: $(p_0 \wedge p_2 \wedge p_5) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (p_0 \wedge \neg p_3 \wedge p_4)$. Tämän tyyppiset disjunktiot, pitkätkin, ovat varsin yleisiä, etenkin logiikan teollisissa sovelluksissa. Tämä voisi esimerkiksi hyvinkin kuvailla olosuhteita jotka johtavat siihen, että auto sammuttaa itsensä. Jokainen disjunkti voisi viitata auton eri mekaniikkaan, ja jos yksikin näistä on tosi niin auto sammuu. Propositiosymbolijen merkitykset olisivat seuraavan laisia: lämpömittari varoittaa ylilämpenemisestä, ilmanvaihto on tukossa, käsijarru on päällä jne.

- Neljän kaavan konjunktio: $(p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge (p_0 \vee p_3 \vee p_4)$. Tämän tyyppiset konjunktiot ovat myös yleisiä logiikan teollisissa sovelluksissa. Esimerkkinä voisivat olla olosuhteet jotka sallivat junan liikkumisen. Jotta juna voi liikkua, erityisten olosuhteiden pitää päteä. Propositiosymbolien merkitykset olisivat vaikka seuraavanlaisia: vihreä valo palaa, keltainen valo palaa, punainen valo palaa, risteysvaroituksen valo palaa, nopeus on yli 80 km/h jne.

1.2.7 Selitys propositiosymboleille

Keskittykäämme nyt yksinkertaisimpiin propositiolauseisiin, eli propositiosymboleihin. Mitä varten ne ovat ja mitä hyötyä niistä voi olla?

Muista, että propositiosymbolit merkitään $p_0, p_1, \ldots$ ja väittävät yksinkertaisia asioita jotka ovat joko tosia tai epätosia, kuten:

- Sataa.
- Lamppu palaa.
- $4 < 10$
- $x < 10$
- Ovi on kiinni.
- Juna liikkuu.
- Katkaisin on päällä
- Olen Roomassa

Kaikissa yllämainituissa esimerkeissä on mahdotonta analysoida lauseita pidemmälle käyttämällä propositiologiikan toimituksia. Yksinkertaisesti sanat “ja”, “ei”, “tai”, “jos...niin...“ ja “...jos ja vain jos...” eivät esiinny näissä lauseissa.

Atomilauseen korvaaminen symbolilla p_n on hyvin samankaltaista kuin kuvailisi esineen nopeutta symbolilla v tai massaa symbolilla m. Aino ero on siinä että propositiosymbolit eivät kuvaa suuretta vaan asiaintilaa, onko jokin tosi vai ei? Tässä huomaamme logiikan ja muun matematiikan eron. Logiikassa peruskäsite on yksinkertaisesti kysymys, onko väite tosi vai ei? Sitä varten matematiikan peruskäsite on jonkin arvon suuruus ja mitattavuus. 1800 luvulla George Boole keksi että propositiologiikassa totuus ja epätotuus voidaan ilmaista luvuilla 1 ja 0 ja näin propositiologiikasta tulee osa yksinkertaista matematiikkaa.

1.2.8 Selitys negaatiosta

A:n negaatio, $\neg A$, on yksinkertaisesti A:n kieltäminen. Tässä muutamia esimerkkejä:

- $\neg$ Ovi on kiinni: Ovi ei ole kiinni: Ovi on auki
- $\neg$ Sataa: Ei sada
- $\neg\ 4 > 10$: 4 ei ole suurempi kuin 10

Puhekielessä negaatio ei ole yhtä helppo kuin muodollisessa propositiologiikan kielessä. Jos propositiologiikassa haluamme kieltää lauseen meidän tarvitsee vain laittaa negaatiosymboli lauseen eteen. Puhekielessä taas täytyy miettiä, mihin negaatiosymboli laitetaan. Jos se menee väärään paikkaan, lauseen luultavasti silti ymmärtää, mutta se voi kuulostaa oudolta.

Pitää myös muistaa, että lauseen "$\neg$ Ovi on kiinni" negaatio on itse asiassa "$\neg$ $\neg$ Ovi on kiinni". Jos annamme symbolin p_0 tarkoittaa lausetta "Ovi on kiinni", niin silloin $\neg p_0$ tarkoittaa "$\neg$ Ovi on kiinni" ja $\neg\neg p_0$ tarkoittaa "$\neg\neg$ Ovi on kiinni". Voisi ajatella että kaksi negaatio,symbolia kumoaa toisensa jolloin "$\neg\neg$ Ovi on kiinni" tarkoittaa samaa kuin "Ovi on kiinni", mutta tätä oletusta ei voida tehdä ennen kuin määrittelemme minkälaisesta propositiologiikasta puhumme koska esimerkiksi *intuitionistisen* logiikkaan mukaan "$\neg\neg$ Ovi on kiinni" ei tarkoita samaa asiaa kuin "Ovi on kiinni".

1.2.9 Selitys konjunktiosta

A:n ja B:n konjunktio, $A \wedge B$, tarkoittaa yksinkertaisesti, että sekä A että B ovat tosia. Lauseita A ja B kutsutaan *konjunkteiksi* . Eli konjunktio $A \wedge B$ on kahden konjunktin konjunktio. Tässä muutama tyypillinen konjunktio:

- Sataa ja tuulee
- $4 < 10$ ja $7 < 3$
- Ovi on kiinni ja juna liikkuu

Konjunktiot ovat helpoimpia meidän loogisista operaatioistamme. Ne ovat todella yksinkertaisia.

1.2.10 Selitys disjunktioista

A:n ja B:n disjunktio, $A \vee B$, tarkoittaa intuitiivisesti sitä että joko, A, B tai molemmat ovat tosia. A ja B ovat disjunktion *disjunkteja*.

- Olen Roomassa tai olen hukassa.
- $4 < x$ tai $y < 3$
- Juna on asemalla tai juna liikkuu.

Disjunktioita voidaan käyttää kahdella eri tavalla. Ensimmäinen tapa on *inklusiivinen* tapa. Tällöin molemmat disjunktit voivat olla tosia. Esimerkiksi: "voit istua englantilaisen vieressä tai voit istua loogikon vieressä". Molemmat väitteet voivat olla tosia, koska oletettavasti englantilainen voi olla loogikko. Toinen tapa, miten disjunktioita voidaan käyttää, on *eksklusiivinen* tapa. Tällöin vain yksi disjunkteista voi olla tosi. Esimerkiksi: "Voin kantaa neljä pientä kassia tai yhden ison kassin". Yleensä suosimme inklusiivista disjunktiota kun valinta ei ole selvä. Kun määrittelemme disjunktion matemaattisesti, määrittelemme sen inklusiivisesti.

1.2.11 Selitys implikaatiosta

Implikaatio A:sta B:hen merkitsee intuitiivisesti relaatiota "jos A niin B". Huomaa, että tämä relaatio ei kerro B:stä mitään jos A ei ole tosi. Implikaatiossa A:ta kutsutaan etujäseneksi tai $(A \rightarrow B)$:n hypoteesiksi, ja B:tä taas kutsutaan takajäseneksi tai $(A \rightarrow B)$:n johtopäätökseksi. Kun implikaatiota käytetään matemaattisessa tai luonnollisessa kielessä se tarkoittaa, että A:ssa on jotain joka tekee B:stä totta tai, että A *aiheuttaa* B:n totuuden. Propositiologiikassa taas otamme hyvin yksinkertaisen asenteen implikaatioon. Implikaation totuus perustuu täysin A:n ja B:n totuuteen riippumatta siitä, onko A:lla ja B:llä jokin syysuhde. Se, että tämä määritelmä ei oikein toimi arkikielessämme, on hinta jonka joudumme maksamaan siitä, että voimme käyttää propositiologiikan muodollista kieltä. On toki muita muodollisia kieliä jotka välttävät tämän ongelman, mutta niissä sitten ilmenee muita hankaluuksia.

Tässä on joitain esimerkkejä implikaatiosta:

- *Jos sataa niin kadut ovat märkiä.* Huomaa että tämä lause ei sano mitään kaduista silloin kun ei sada.

Ehkä kadut ovat kuivia kun ei sada, tai ehkä ihmiset kastelevat nurmikkojaan ja kadut ovat sen vuoksi märkiä. Lause ei ilmaise mitään väitteitä noista tilanteista. Lause yksinkertaisesti sanoo että *jos* sataa niin silloin kadut ovat märkiä.

- *Jos* $x < 3$ *niin* $x < 10$. Lause vaikuttaisi olevan tosi lause kokonaisluvuista. Tietenkin riippuen arvosta jonka x ottaa, voi olla että $x < 10$ pitää paikkansa vaikka $x < 3$ ei pitäisi paikkansa. Lause ei sano mitään tilanteesta jolloin $x < 3$ ei pidä paikkaansa. Lause koskee vain tilanteita joissa $x < 3$.

- *Jos juna liikkuu niin ovi on kiinni.* Tämä lause vaatii hieman tarkempaa analyysia:

Annetaan p_0:n olla atomilause

"Juna liikkuu"

ja annetaan p_1:n olla atomilause

"Ovi on kiinni".

Täten $p_0 \to p_1$ tarkoittaa

"Jos juna liikkuu niin ovi on kiinni".

Huomaa, että $p_0 \to p_1$ ei tee mitään väitettä tilanteista missä juna ei liiku. Voimme kuvitella että junassa on tietokone joka tarkistaa kolmen sekunnin välein, että turvallisuusmääräykset täyttyvät. Yksi näistä turvallisuusmääräyksistä voi olla $p_0 \to p_1$. Eli joka 3 sekuntia tietokone tarkistaa, onko juna liikkeellä. Jos juna ei liiku tietokoneen ei tarvitse tehdä mitään, mutta heti kun juna alkaa liikkua, ohjelman pitää kiireisesti sulkea ovi, tai ovet. Toisin sanoen ohjelma tarkistaa että $p_0 \to p_1$ on tosi. Jos p_0 on epätosi, niin tietokoneella ei ole syytä huoleen, mutta jos p_0 on tosi, niin ohjelma yrittää tehdä lauseen p_1 myös todeksi. Tämä on implikaation todellinen merkitys logiikassa.

1.2.12 Selitys ekvivalenssista

A:n ja B:n ekvivalenssi, $A \leftrightarrow B$, tarkoittaa intuitiivisesti että A on totta jos ja vain jos B on totta. Tässä on joitakin esimerkkejä:

- Lamppu palaa jos ja vain jos kytkin on päällä.
- $x < 10$ jos ja vain jos $x + 5 < 15$.
- Ovi on lukittu jos ja vain jos juna liikkuu.

Kaikissa tapauksissa lauseen $A \leftrightarrow B$ intuitiivinen merkitys on, että joko molemmat ovat tosia tai molemmat ovat epätosia. Ekvivalenssi on suhteellisen helppo ymmärtää, verrattuna disjunktioon ja implikaatioon.

1.2.13 Pääkonnektiivi

Pääkonnektiivi on hyödyllinen käsite kun puhumme propositiolauseista. Pääkonnektiivin löytäminen on helppoa. Pääkonnektiiveja ovat

$\neg A$	negaatio	$\neg$
$A \wedge B$	konjunktio	$\wedge$
$A \vee B$	disjunktio	$\vee$
$A \to B$	implikaatio	$\to$
$A \leftrightarrow B$	ekvivalenssi	$\leftrightarrow$

Esimerkiksi lauseen $(A \vee \neg B) \to (C \vee D)$ pääkonnektiivi on implikaatio.

Yleensä kaavan looginen analyysi aloitetaan tunnistamalla sen pääkonnektiivi. Tämän jälkeen loogikko sitten päättää mitä hän tekee seuraavaksi. Sulkumerkkejä koskevien sääntöjemme takia voimme taata että jokaisella kaavalla on yksi ja vain yksi pääkonnektiivi. Toisin sanoen, yksi henkilö ei voi päätyä tulokseen että kaavan pääkonnektiivi on disjunktio, kun joku toinen päätyy tulokseen että saman kaavan pääkonnektiivi on konjunktio.

1.2.14 Alikaava

Toinen hyödyllinen käsite on alikaava. Intuitiivisesti kaavan alikaavoja ovat ne kaikki pienemmät kaavat joista kyseinen kaava rakentuu.

Esimerkiksi:

p_n	alikaava	p_n
$\neg A$	alikaavat	$\neg A$ ja A:n alikaavat
$A \wedge B$	alikaavat	$A \wedge B$ ja A:n ja B:n alikaavat
$A \vee B$	alikaavat	$A \vee B$ ja A:n ja B:n alikaavat
$A \to B$	alikaavat	$A \to B$ ja A:n ja B:n alikaavat
$A \leftrightarrow B$	alikaavat	$A \leftrightarrow B$ ja A:n ja B:n alikaavat

Esimerkiksi lauseen

$$(p_0 \vee \neg p_1) \to (p_2 \wedge p_1)$$

alikaavat ovat: $(p_0 \vee \neg p_1) \to (p_2 \wedge p_1)$, $p_0 \vee \neg p_1$, $p_2 \wedge p_1$, p_0, $\neg p_1$, p_2, ja p_1.

Kaavojen yhteydessä myös usein puhutaan *välittömistä* alikaavoista. Ne ovat yhtä helppoja löytää kuin yllä mainitut pääkonnektiivit.

Esimerkki:

p_n:n	välitön alikaava:	–
$\neg A$:n	välitön alikaava on	A
$A \wedge B$:n	välittömät alikaavat ovat	A, B
$A \vee B$:n	välittömät alikaavat ovat	A, B
$A \to B$:n	välittömät alikaavat ovat	A, B
$A \leftrightarrow B$:n	välittömät alikaavat ovat	A, B

Esimerkiksi, lauseen $(p_0 \vee \neg p_1) \to (p_2 \wedge p_1)$ välittömät alikaavat ovat $(p_0 \vee \neg p_1)$ ja $(p_2 \wedge p_1)$.

Täten propositiolauseet aina rakentuvat liittämällä välittömät alikaavat pääkonnektiivilla. Tämä kuulostaa niin yksinkertaiselta että joku saattaa kyseenalaistaa tämän tiedon hyödyn. Kaikki logiikan keskeiset menetelmät perustavat kuitenkin lauseiden välittömien alikaavojen analysointiin, joten kyllä tästä on hyötyä.

On siis hyvä ymmärtää käsitteet pääkonnektiivi ja välitön alikaava.

Tulemme vielä oppimaan:

- Totuuden määräämiseen
- Luonnollisen päättelyn
- Semanttiset puut

Joten on hyvä osata käyttää pääkkonnektiivin ja välittömän alikaavan konsepteja. Tähän päättyy propositiologiikan esinmäinen luento. Seuraavassa luennossa käsittelemme totuustauluja.

1.2.15 Ratkotut tehtävät

Kokeilkaamme nyt ratkoa joitain tehtäviä, jotka liittyvät oppimaamme materiaaliin.

Tehtävä 1 *Kirjoita lause*
"Jos sataa, niin en lähde ulos ilman sateenvarjoa."
propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi.

Ratkaisu: Atomilauseet ovat "sataa" ja "lähde(n) ulos ilman sateenvarjoa". Nämä ovat atomilauseita koska emme voi koota niitä pienemmistä lauseista käyttämällä tuttuja konnektiiveja kuten "ei", "ja", "tai", "jos... niin..." ja "...jos ja vain jos...".

Lause on muotoa $p_0 \to \neg p_1$ ja sen pääkonnektiivi on implikaatio.

Tässä näemme että propositiologiikka yksinkertaistaa luonnollisen kielen lauseita merkittävästi. Propositiologiikassa haluamme vain lauseen *loogisen rakenteen* ja tällöinkin vain rakenteen jota propositiologiikka pystyy käsittelemään. □

Tehtävä 2 *Kirjoita lause*
"Jos $y' = ax + by$, niin $y'' = ax' + by'$"
propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi.

Ratkaisu: Atomilauseet ovat $y' = ax + by$ ja $y'' = ax' + by'$. Näiden lauseiden sisäinen rakenne on selvästi yhtälön muodossa mutta propositiologiikka ei kiinnitä tähän huomiota.

Lause on muotoa $p_0 \to p_1$ ja sen pääkonnektiivi on implikaatio. □

Tehtävä 3 *Kirjoita lause*
"Jos ovi ei ole kiinni tai juna on asemalla, niin vihreä valo palaa."
propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

Ratkaisu: Tämä on hyvä esimerkki implikaation käytöstä luonnollisessa kielessä. Atomilauseet ovat:

- p_0: ovi on kiinni
- p_1: juna on asemalla
- p_2: vihreä valo palaa

Lause on muotoa $(\neg p_0 \vee p_1) \to p_2$. Sen pääkonnektiivi on implikaatio ja sen välittömät alikaavat ovat $(\neg p_0 \vee p_1)$ ja p_2. □

Tehtävä 4 *Kirjoita lause*
"Joko A ostaa Z:n ja Z ei osta U:ta, tai B ostaa sekä Z:n että U:n."
propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

Ratkaisu: Atomilauseet ovat:

- p_0: A ostaa Z:n

- p_1: Z ostaa U:n
- p_2: B ostaa Z:n
- p_3: B ostaa U:n

Lause on muotoa $(p_0 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_3)$. Sen pääkonnektiivi on disjunktio ja sen välittömät alikaavat ovat $(p_0 \wedge \neg p_1)$ ja $(p_2 \wedge p_3)$.

Olemme käyttäneet konnektiiveja "joko..., tai ... sekä...että...." luonnollisessa kielessä jotta voimme ilmaista mihin sulkumerkit menisivät, nimittäin lause

"A ostaa Z:n ja Z ei osta U:ta tai B ostaa Z:n ja B ostaa U:n."
ei ole selkeä. □

1.2.16 Tehtävät

Tehtävä 5 *Mitkä seuraavista ovat propositiolauseita?*

1. *Jos lamppu on päällä, niin huone on valaistu.*
2. *Huone on pimeä, jos lamppu on rikki.*
3. *Pappi julisti heidät mieheksi ja vaimoksi.*
4. *Olkoon x reaaliluku.*
5. *x on reaaliluku.*

Tehtävä 6 *Mitkä seuraavista ovat propositiolauseita?*

1. *Ellei lamppu ole päällä, niin huone on pimeä.*
2. *Huone on pimeä vain jos lamppu on rikki.*
3. *Julistan teidät mieheksi ja vaimoksi.*
4. *Pappi, mies ja vaimo.*
5. *g on f:n derivaatta.*
6. *Olkoon g f:n derivaatta.*

Tehtävä 7 *Mitkä seuraavista ovat oikein muodostettuja propositiolauseita?*

1. $(p_2 \leftrightarrow \neg p_1) \to (p_2 \to p_3)$
2. $p_0 \wedge \neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_1)$
3. $\neg(p_0 \to (p_1 \to (p_2 \to p_3)))$
4. $\neg\neg p_0 \to p_0$

Tehtävä 8 *Mitkä seuraavista ovat oikein muodostettuja propositiolauseita?*

1. $p_2 \leftrightarrow p_1 \leftrightarrow p_2$
2. $p_0 \vee \neg p_1 \vee (p_2 \to p_0)$
3. $(p_0 \wedge p_1) \to p_0 \wedge (p_0 \wedge p_1) \to p_1$
4. $(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2] \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2)$

Tehtävä 9 *Lauseen $(p_2 \leftrightarrow \neg p_1) \to (p_2 \to p_3)$ pääkonnektiivi on:*

1. *Negaatio*
2. *Konjunktio*
3. *Disjunktio*
4. *Implikaati*
5. *Ekvivalenssi?*

Tehtävä 10 *Lauseen $\neg((p_2 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \vee p_3))$ pääkonnektiivi on:*

1. *Negaatio*
2. *Konjunktio*
3. *Disjunktio*
4. *Implikaatio*
5. *Ekvivalenssi?*

Tehtävä 11 *Lauseen $(p_2 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_3)$ pääkonnektiivi on:*

1. *Negaatio*
2. *Konjunktio*
3. *Disjunktio*
4. *Implikaatio*
5. *Ekvivalenssi?*

Tehtävä 12 *Lauseen $((p_2 \to \neg p_1) \vee ((p_2 \vee p6) \wedge p_3)) \to p_3$ pääkonnektiivi on:*

1. *Negaatio*
2. *Konjunktio*
3. *Disjunktio*
4. *Implikaatio*
5. *Ekvivalenssi?*

Tehtävä 13 • *Kirjoita lause*

"Jos mn on parillinen, niin silloin m on parillinen tai n on parillinen."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja sen välittömät alikaavat.

• *Kirjoita lause*

"a on alkuluku jos ja vain jos $a^2 + 6a + 1$ on alkuluku."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

Tehtävä 14 • *Kirjoita lause*

"Portti ei ollut auki eivätkä valot olleet päällä."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

• *Kirjoita lause*

"Jos joko A ostaa sekä Z:n että U:n tai A ostaa V:n, niin B ei myy W:tä."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

Tehtävä 15 • *Kirjoita lause*

"Jos ovi on auki ja juna ei liiku, niin vihreä valo palaa."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

• *Kirjoita lause*

"Jos tiedosto on saatavilla, niin joko Mikko voi saada sen tai Marko voi saada sen muttei molemmat."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

Tehtävä 16 • *Kirjoita lause*

"Menemme rannalle tai puistoon, ellei sada."

propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

• *Kirjoita lause*

"Juna liikkuu vain jos ovet ovat kiinni ja turvavalo on vihreä."

propositiolauseena ja ilmoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat.

Tehtävä 17 *Kirjoita lause*
"Et voi jättää kommentteja tähään kuvaan, mutta voit ladata omia kuviasi ja osallistua meidän blogiimme." propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat. Vihje: Älä huolestu jos et pysty muuntamaan lausetta täydelliseksi propositiolauseeksi, kaikkine tyylipiirteineen. Kuhan saat olennaisen rakenteen propositiolauseeseen.

Tehtävä 18 *Kirjoita lause*
"Paksu lumi peitti kaiken, mutta taloja näkyi selvästi ja sieltä täältä näkyi jokunen auto." propositiolauseena ja osoita sen pääkonnektiivi ja välittömät alikaavat. Vihje: Älä huolestu jos et pysty muuntamaan lausetta täydelliseksi propositiolauseeksi, kaikkine tyylipiirteineen. Kuhan saat olennaisen rakenteen propositiolauseeseen.

1.3 Totuustaulu

1.3.1 Totuusarvo

Atomilauseet, eli yksinkertaisesti propositiosymbolit, ilmaisevat asiaintiloja kuten:

- Sataa.
- Juna liikkuu.

Nämä asiaintilat ovat joko tosia tai epätosia riippuen olosuhteista. Joku päivä sataa ja joku toinen päivä taas ei sada. Helsingissä saattaa sataa, kun taas Varsovassa ei. Juna saattaa liikkua tai sitten ei. Me kutsumme totuutta ja epätotuutta totuusarvoiksi ja ilmaisemme ne numeroilla 1 ja 0. Monimutkaisemmatkin propositiolauseet, kuten $\neg A$,

$A \wedge B$, $A \vee B$, jne., ilmaisevat myös asiaintiloja ja täten voivat myös olla tosia tai epätosia. Täten näidenkin sisältö voidaan ilmaista totuusarvoilla 1 ja 0.

1.3.2 Totuusarvot (jatkoa)

Yksinkertaisimmat propositiolauseet, kuten p_0, p_1,..., voivat olla totuusarvoltaan joko 1 tai 0 ja tämä arvo voidaan valita täysin vapaasti. Kun rakennamme niistä kaavoja, kuten $p_0 \vee p_1$ tai $p_0 \to p_1$, niin näiden totuusarvot ovat voidaan laskea arvoista, jotka annoimme alunperäisille atomilauseille. Eli totuusarvojen antaminen atomilauseille on loppujen lopuksi ainoa ratkaiseva asia. Sitä miten totuusarvot on annettu atomilauseille kutsutaan *totuusjakaumaksi*.

Jos käytämme propositiologiikkaa tutkiaksemme jokapäiväisiä ilmiöitä, niin voimme käyttää propositiosymboleja merkitsemään asiantiloja kuten “Sataa” tai “Juna liikkuu”. Luonnollinen totuusjakauma antaisi väitteelle “Sataa” joko arvon 1 jos todellakin sataa, tai arvon 0 jos ei sada. Vastaavasti väite “Juna liikkuu” saisi arvon 1 jos juna todellakin liikkuisi tai arvon 0 jos juna ei liiku. Mutta propositiologiikan ideana ei ole tutkia asioita ympärillämme niin kuin ne *ovat*, vaan miten ne *voisivat olla*. Ulkona sataa, mutta voisi myös olla että ulkona ei sada. Juna liikkuu, mutta voisi olla että juna ei liiku. Propositiologiikassa tutkimme propositiolauseita missä tahansa totuusjakaumassa. Tämä vapaus vaihtaa totuusjakaumaa on propositiologiikan peruspiirre, ja on pääsääntöisesti se mikä erottaa logiikan empiirisestä tieteestä. Empiirisessä tieteessä tutkija rakentaa hypoteesinsa empiiristen havaintojen nojaan ja tämän takia totuusjakaumat ovat erittäin kontrolloituja. Tämä ei tosin ole aivan totta kvanttimekaniikassa. Usein tieteellisissä kokeissa saattaa olla hyvinkin tärkeää vaihdella atomilauseita vapaasti. Esimerkiksi: jos pudotamme samankokoisia palloja Pisan tornin huipulta, saattaisimme haluta vaihdella niiden painoa ja pudotus korkeutta nähdäksemme, miten nämä vaikuttavat putoamisaikaan.

1.3.3 Totuusjakauma

Totuusjakauma määrittää totuusarvot, joko 1 (tosi) tai 0 (epätosi). Täten totuusjakauma on funktio, jonka määrittelyjoukko on propositiosymbolien joukko ja jonka arvot ovat joukossa $\{0, 1\}$.

Totuusjakaumat ovat *totuustaulujen* rakennuspalikoita. Totuustaulut ovat järjestelmällinen työkalu monimutkaisten propositiolauseiden analysointiin. Ne voidaan välttää, mutta ne ovat hyvin käteviä.

1.3.4 Totuusjakauma (jatkoa)

Totuusjakaumat yleistyvät kaikkiin kaavoihin totuustaulujen kautta.

Mielivaltaisen propositiolauseen A:n totuusarvo $v(A)$ voidaan helposti saada selville katsomalla sen välittömien alikaavojen ja pääkonnektiivin totuustaulua.

1.3.5 Totuustaulu

Propositiolauseen *totuustaulu* on taulukko, jossa lauseen ja sen alikaavojen totuusarvot on listattu kaikilla mahdollisilla eri totuusjakaumilla. Jotta voimme muodostaa ensimmäisen totuustaulumme, meidän pitää selvittää miten eri totuusarvot toimivat eri konnektiivien kanssa:

- Konjunktio
- Disjunktio
- Negaatio
- Implikaatio
- Ekvivalenssi

1.3.6 Konjunktio

Intuitiivisesti konjunktio $A \wedge B$ on tosi, jos molemmat konjunktit A ja B ovat tosia. Tämän näkee helposti seuraavasta taulusta:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

On hyvä muistaa, että konjunktion totuustaulussa on vain ja ainoastaan yksi rivi jossa konjunktiolla on totuusarvo 1. Tämän kaltaisessa totuustaulussa voivat A ja B olla samakin kaava, mutta koska haluamme että taulukko kuvailee yleisimmän skenaarion, annamme niiden myös saada totuusarvoja 1 ja 0 toisistaan riippumatta.

1.3.7 Disjunktio

Intuitiivisesti, disjunktio $A \vee B$ on tosi, jos A tai B ovat tosia. Mutta mitä jos molemmat ovat tosia? Me päätämme, että tässä tilanteessa disjunktio on myös totta. Täten annamme disjunktiolle $\vee$ merkityksen, jota kutsutaan inklusiiviseksi disjunktioksi.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

On hyvä muistaa, että disjunktion totuustaulussa on vain ja ainoastaan yksi rivi jossa disjunktion totuusarvo on 0.

1.3.8 Negaatio

Negaatio on hyvin yksinkertainen konnektiivi tässä yhteydessä. Negaatio $\neg A$ on, jos A on epätosi. Negaatio on toisin sanoen totuusarvon vaihtaja.

A	$\neg A$
1	0
0	1

1.3.9 Implikaatio

Meidän täytyy nyt päättää mikä on implikaation $A \to B$ totuusarvo olettaen, että tiedämme A:n ja B:n totuusarvot. Intuitiivisesti $A \to B$ on tosi, jos B "seuraa" A:sta. Koska kahdella totuusarvolla ei oikeastaan ole mahdollista ilmaista tätä "seuraa"-käsitettä päätämme, että $A \to B$ on tosi, jos A on epätosi, tai B on tosi.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

On hyvä muistaa, että implikaation totuustaulussa on vain ja ainoastaan yksi rivi jossa implikaatiolla on totuusarvo 0.

On olemassa monimutkaisempia propositiologiikan systeemejä jotka ottavat huomioon implikaation "seuraa" luonteen paremmin. Vaikka valintamme tekee propositiolauseet kuten "jos kuu on juustoa niin $2 + 2 = 5$" ja "Jos $0 \neq 0$, niin silloin $2+2 = 4$" tosiksi, niin huomaamme että valintamme implikaation suhteen toimii yllättävän hyvin.

1.3.10 Implikaation tulkinta

Katsokaamme joitain tosielämän esimerkkejä implikaatiosta. Jos p on väite "Jukka asuu Helsingissä" ja q on väite "Jukka asuu Suomessa", niin implikaatio $p \to q$ on tosi asuipa Jukka Helsingissä tai ei. Tämä totuus perustuu siihen, että Helsinki on Suomessa ja missä Jukka oikeasti asuu ei juuri vaikuta implikaation totuuteen. Ainoa seikka mikä voisi vaikuttaa implikaation totuuteen olisi, jos Jukka asuisi Helsingissä, mutta ei Suomessa.

1.3.11 Implikaation tulkinta (jatkoa)

Yksi tapa ymmärtää implikaation totuustaulukkoa on ajatella, että A ja B ovat propositiolauseiden sijasta joukon 0 osajoukkoja. On vain kaksi osajoukkoa: $\emptyset$ and $\{0\}$. Merkitkäämme niitä numeroilla 0 ja 1.

Voimme nyt ajatella, että $A \to B$ tarkoittaa "B sisältää A:n"

		A	B	$A \to B$
$\{0\} \subseteq \{0\}$	$\therefore$ riville 1 tulee 1	1	1	1
$\{0\} \not\subseteq \emptyset$	$\therefore$ riville 2 tulee 0	1	0	0
$\emptyset \subseteq \{0\}$	$\therefore$ riville 3 tulee 1	0	1	1
$\emptyset \subseteq \emptyset$	$\therefore$ riville 4 tulee 1.	0	0	1

1.3.12 Ekvivalenssi

Ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ on tosi, jos molemmilla lauseilla A ja B on *sama* arvo.

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Katso Kuva 1.2 ja Kuva 1.3 nähdäksesi kertauksen propositiolausesita.

$v(p_n)$	=	0 or 1
$v(\neg A)$	=	0 jos $v(A) = 1$, muuten 1
$v(A \wedge B)$	=	0 jos $v(A) = 0$ tai $v(B) = 0$, muuten 1
$v(A \vee B)$	=	1 jos $v(A) = 1$ tai $v(B) = 1$, muuten 0
$v(A \to B)$	=	0 jos $v(A) = 1$ ja $v(B) = 0$, muuten 1
$v(A \leftrightarrow B)$	=	1 jos ($v(A) = 1$ ja $v(B) = 1$),
		tai ($v(A) = 0$ ja $v(B) = 0$), muuten 0

Kuva 1.2: Propositiolauseiden totuusjakauma

A	B	$\neg A$	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \to B)$	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kuva 1.3: propositiolauseiden totuustaulujen yhteenveto

1.3.13 Esimerkki

Katsokaamme nyt koko totuustaulua seuraavaalle propositiolauseelle:

$$\neg(p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \wedge p_1).$$

Kirjoitamme kaavassa ilmenevät propositiosymbolit taulukon vasempaan sarakkeeseen ja laadimme rivin jokaiselle näiden symbolien totuusarvojen mahdolliselle yhdistelmälle. Tästä oikealle laadimme sarakkeen jokaisen propositiosymbolin ja jokaisen konnektiivin alle.

Jokainen konnektiivi on pääkonnektiivi jollekin alikaavalle. Totuusarvo jonka kirjoitamme konnektiivin alle on tämän alikaavan totuusarvo.

Ensin täytämme propositiosymbolien totuusarvot jotka kopioimme vasemmanpuoleisista sarakkeista:

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$p_1)$
1	1		1		1			1		1
1	0		1		0			1		0
0	1		0		1			0		1
0	0		0		0			0		0

Sitten täytämme negaation sarakkeen. Se on helppoa. Vaihdetaan vaan nollat ja ykköset keskenään:

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$p_1)$
1	1		1		1		0	1		1
1	0		1		0		0	1		0
0	1		0		1		1	0		1
0	0		0		0		1	0		0

Nyt voimme täyttää taulukon konjunktion. Huomaa että konjunktit ovat $\neg p_0$ ja p_1, joten meidän täytyy katsoa sarakkeita jotka vastaavat alikaavoja $\neg p_0$ ja p_1.

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$p_1)$
1	1		1		1		0	1	0	1
1	0		1		0		0	1	0	0
0	1		0		1		1	0	1	1
0	0		0		0		1	0	0	0

Nyt disjunktio:

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$p_1)$
1	1		1	1	1		0	1	0	1
1	0		1	1	0		0	1	0	0
0	1		0	1	1		1	0	1	1
0	0		0	0	0		1	0	0	0

Seuraavaksi hoidamme vasemman puoleisen negaation. Huomaa, että emme voi laskea ekvivalenssia ennen, kuin olemme hoitaneet negaatio symbolin koska $\neg(p_0 \vee p_1)$ on ekvivalenssin välitön alikaava.

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$p_1)$
1	1	0	1	1	1		0	1	0	1
1	0	0	1	1	0		0	1	0	0
0	1	0	0	1	1		1	0	1	1
0	0	1	0	0	0		1	0	0	0

Viimein voimme laskea ekvivalenssin totuusarvon:

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$p_1)$
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Totuustaulu on vihdoin valmis! Taulusta näemme, että kaava saa arvon 1, jos p_0 saa arvon 1 ja kaava saa arvon 0, jos p_0 saa arvon 0. Monimutkainen propositiolause siis yrittää sanoa, että p_0 on tosi. Tämä voi tilanteesta riippuen olla erittäin hyödyllistä tietoa.

Huomaa, että emme välitä totuusjakaumista niillä propositiosymboleilla jotka eivät lainkaan esiinny tutkittavassa propositiolauseessa.

1.3.14 Esimerkki

Tässä on isompi totuustaulu joka on rakennettu samalla tavalla kuin edellinen. Tämäkin on täytetty sarakkeittain, aloittamalla propositiosymboleista, täyttämällä sitten alikaavat pienestä isompaan, kunnes koko taulukko on täytetty.

p_0	p_1	p_2	$(((p_0$	$\rightarrow$	$p_1)$	$\wedge$	$(p_1$	$\rightarrow$	$p_2))$	$\rightarrow$	$(p_0$	$\rightarrow$	$p_2))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Ensikatsaukselta propositiolause saattaa näyttää mahdottomalta ymmärtää, mutta kun sen laittaa mekaanisesti totuustaulukkoon niin siitä saa helposti selvää. Itse asiassa tämä kaava näyttäisi kertovan jotain implikaatiosta. Eli toisin sanoen, jos p_0:sta seuraa p_1 ja p_1:stä seuraa p_2, niin p_0:sta seuraa p_2. Mielenkiintoisesti taulusta myös huomaa, että olipa totuusjakauma mikä tahansa niin propositiolause saa aina arvokseen 1. Näille propositiolauseille on oma nimensä ("tautologia"), mutta palaamme niihin myöhemmin.

1.3.15 Totuustaulujen epäkäytännöllisyys

Totuustaulut muuttuvat hyvin nopeasti liian isoiksi. Jos meillä on n propositiosymbolia, niin meillä tulee olemaan 2^n riviä totuustaulussamme. Totuustaulu kasvaa eksponentiaalisesti propositiosymbolien määrän mukaan. Tämä rajoittaa paljon totuustaulujen käyttöä. Tämän kurssin aikana opimme kaksi muuta tapaa analysoida propositiolauseita. Nämä tavat ovat hieman monimutkaisempia, mutta silti paljon kätevämpiä.

1.3.16 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 19 *Olettakaamme, että* $v(p_0) = 1$ *ja että* $v(p_1) = 0$. *Laske* $v(\neg(p_0 \vee p_1))$.

Ratkaisu: p_0:n ja p_1:n totuusarvot on annettu joten voimme helposti laskea niiden disjunktion totuusarvon. Sen jälkeen voimme laskea disjunktion negaation, ja olemme valmiita.

$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$
0	1	1	0

Vastaus on 0. □

Tehtävä 20 *Olettakaamme, että* $v(p_0) = 1$ *ja että* $v(p_1) = 0$. *Laske* $v(\neg p_0 \to p_1)$.

Ratkaisu: p_0:n ja p_1:n totuusarvot on annettu. Voimme välittömästi laskea $\neg p_0$:n totuusarvon. Sitten voimme laskea implikaation $\neg p_0 \to p_1$ totuusarvon ja olemme valmiita.

$\neg$	p_0	$\to$	p_1
0	1	1	0

Vastaus on 1. □

Tehtävä 21 *Olettakaamme, että* $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$ *ja, että* $v(p_2) = 1$. *Laske* $v(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$.

Ratkaisu: p_0:n, p_1:n ja p_2:n totuusarvot ovat annettu. Voimme välittömästi laskea disjunktion totuusarvon. Sitten voimme laskea konjunktion totuusarvon ja olemme valmiita.

p_0	$\wedge$	$(p_1$	$\vee$	$p_2)$
1	1	0	1	1

Vastaus on 1. □

Tehtävä 22 *Piirrä propositiolauseelle* $p_0 \leftrightarrow \neg p_1$ *totuustaulu.*

Ratkaisu: Lauseessa on kaksi propositiosymbolia joten meillä on neljä riviä totuustaulussamme. Ensin täytämme propositiosymbolejen sarakkeet yksinkertaisesti kopioimalla vasemmalta. Sitten täytämme negaation sarakkeen ja lopulta ekvivalenssin sarakkeen.

p_0	p_1	p_0	$\leftrightarrow$	$\neg$	p_1
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0

□

Tehtävä 23 *Piirrä propositiolauseelle* $\neg p_0 \vee p_1$ *totuustaulu.*

Ratkaisu: Lauseessa on kaksi propositiosymbolia joten meillä on neljä riviä totuustaulussamme. Ensin täytämme propositiosymbolejen sarakkeet yksinkertaisesti kopioimalla vasemmalta. Sitten täytämme negaation sarakkeen, ja lopulta disjunktion sarakkeen.

p_0	p_1	$\neg$	p_0	$\vee$	p_1
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0

□

Tehtävä 24 *Piirrä propositiolauseelle* $\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$ *totuustaulu.*

Ratkaisu: Lauseessa on kaksi propositiosymbolia joten meillä on neljä riviä totuustaulussamme. Ensin täytämme propositiosymbolejen sarakkeet yksinkertaisesti kopioimalla vasemmalta. Seuraavaksi täytämme vasemman puolisen negaation sarakkeen, ja sitten oikean puolisen negaation sarakkeen. Sitten täytämme disjunktion sarakkeen ja lopulta ekvivalenssin sarakkeen.

Huomaa, että järjestystä missä täytämme taulukon voi joustaa hieman. Esimerkiksi, kun olemme täyttäneet propositiosymbolien sarakkeen voimme täyttää oikean puolisen negaation sarakkeen konjunktion sijasta, mutta meidän töytyy olla varovaisia järjestyksen kanssa. Väärä järjestys yleensä johtaa väärään vastaukseen.

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$p_1)$
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0

□

1.3.17 Tehtävät

Tehtävä 25 *Olettakaamme, että* $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 1$ *ja että* $v(p_2) = 0$. *Laske* $v(p_0 \to (p_1 \to p_2))$.

Tehtävä 26 *Olettakaamme, että* $v(p_3) = 1$, $v(p_6) = 0$ *ja että* $v(p_9) = 0$. *Laske* $v((p_3 \to p_9) \vee (p_6 \to p_9))$.

Tehtävä 27 *Olettakaamme, että* $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$ *ja että* $v(p_2) = 0$. *Laske* $v((p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0))$.

Tehtävä 28 *Olettakaamme, että* $v(p_0) = 1$, $v(p_1) = 0$ *ja että* $v(p_2) = 0$. *Laske* $v(\neg(\neg p_0 \to \neg p_1) \vee \neg(\neg p_1 \to \neg p_2))$.

Tehtävä 29 *Täytä puuttuvat arvot:*

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\vee$	$p_1)$	$\wedge$	$(\neg$	p_0	$\wedge$	$\neg$	$p_1)$
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1		0	1	1		1	0		0	1
0	0		0		0			0			0

Tehtävä 30 *Täytä puuttuvat arvot:*

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\vee$	$(\neg$	p_0	$\to$	$\neg$	$p_1)$
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0		0	1		1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0		0	1
0	0	1	0	0	0			0			0

Tehtävä 31 *Todista*

1. $v(\neg A) = 1 - v(A)$
2. $v(A \wedge B) = v(A) \cdot v(B)$
3. $v(A \vee B) = v(A) + v(B) - v(A) \cdot v(B)$
4. $v(A \to B) = 1 - v(A) + v(A) \cdot v(B)$
5. $v(A \leftrightarrow B) = 1 - v(A) - v(B) + 2 \cdot v(A) \cdot v(B)$

Tehtävä 32 *Eksklusiivinen disjunktio on konnektiivi "A tai B muttei molemmat". Tässä on joitain esimerkkejä eksklusiivisestä disjunktiosta luonnollisessa kielessä:*

- *Jos tänään on perjantain, olen Roomassa tai olen Madridissa.*
- *Saat matkatavarasi takaisin tai lentoyhtiö maksaa täyden korvauksen.*

Piirrä valikoivan disjunktion totuustaulu.

Tehtävä 33 *Olkoon* M *joukko totuusjakaumia. Olkoon jokaiselle propositiolauseelle* A*:* $[A] = \{v \in M : v(A) = 1\}$. *Näytä*

1. $[A \wedge B] = [A] \cap [B]$
2. $[A \vee B] = [A] \cup [B]$
3. $[\neg A] = M - [A]$
4. $[A \to B] = M$ *jos ja vain jos* $[A] \subseteq [B]$
5. $[A \leftrightarrow B] = M$ *jos ja vain jos* $[A] = [B]$

Tehtävä 34 *Olkoon* M *joukko totuusjakaumia välillä* $p_0, \ldots, p_{n-1}$. *Tarkistellaan propositiosymboleista* $p_0, \ldots, p_{n-1}$ *muodostettuja propositiolauseita* A. *Olkoon* $\#(A)$ *totuusjakautumien* v *määrä* M*:ssä siten, että* $v(A) = 1$. *Olkoon* $p(A) = \#(A)/2^n$. *Kutsumme* $p(A)$*:ta* A*:n todennäköisyydeksi. Näytä*

1. $p(A \vee B) + p(A \wedge B) = p(A) + p(B)$
2. $p(\neg A) = 1 - p(A)$

Tehtävä 35 *Muista, että* $p(A)$ *on* A*:n todennäköisyys.*

1. *Kumpi on todennäköisempää? (Toisin sanoen: kumalla on suurempi todennäköisyys?)*
    - $p_0 \wedge p_1$
    - $p_0 \to p_1$
2. *Kumpi on todennäköisempää? (Toisin sanoen: kumalla on suurempi todennäköisyys?)*

- $(p_0 \wedge \neg p_1) \vee (p_1 \wedge \neg p_2)$
- $p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)$

Tehtävä 36 *Olettakaamme että X on joukko totuusjakaumia. Sanomme että;*

1. *X on tyyppiä p_i jos $v(p_i) = 1$ kaikille v joukossa X.*
2. *X on tyyppiä $\neg p_i$ jos $v(p_i) = 0$ kaikille v joukossa X.*
3. *X on tyyppiä $A \wedge B$ jos se on tyyppiä A ja tyyppiä B.*
4. *X on tyyppiä $A \vee B$ if $X = Y \cup Z$, missä Y on tyyppiä A ja Z on tyyppiä B.*
5. *X on tyyppiä $\neg(A \wedge B)$ jos se on tyyppiä $\neg A \vee \neg B$.*
6. *X on tyyppiä $\neg(A \vee B)$ joss se on tyyppiä $\neg A \wedge \neg B$.*
7. *X on tyyppiä $A \to B$ jos se on tyyppiä $\neg A \vee B$.*
8. *X on tyyppiä $\neg(A \to B)$ jos se on tyyppiä $A \wedge \neg B$.*
9. *X on tyyppiä $A \leftrightarrow B$ jos se on tyyppiä $(A \to B) \wedge (B \to A)$.*
10. *X on tyyppiä $\neg(A \leftrightarrow B)$ jos se on tyyppiä $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.*

Näytä että X on tyyppiä A jos ja vain jos $v(A) = 1$ kaikille v joukossa X.

1.4 Totuustaulujen käyttö

1.4.1 Tautologia

Arkikielessä ihminen käyttää tautologiaa, kun hän sanoo jotakin, joka on totta vain ilmaisumuodon takia, kuten “joko sataa tai ei”. Normaalisti tautologian käyttäminen kuulostaa vähän oudolta, koska siinä ei oikeastaan ole mitään sisältöä tai merkitystä. Toisaalta ihmiset voivat käyttää tautologioita puheessaan ilman, että he sitä itse edes huomaavat, kuten ’Jos Caesar rakensi Reinin yli sillan, niin Caesar marssi Galliaan tai rakensi Reinin yli sillan’. Sosiaalisessa kontekstissa tautologiat saattavat olla hieman turhia, mutta logiikassa on erittäin tärkeätä pystyä tunnistamaan tautologia. Tautologian tunnistaminen pitkässä kaavassa on niin vaikeata, että toimivan algoritmin löytäminen sille on kuuluisa matemaattinen ongelma (nimeltään $P = NP$-ongelma[1]). Tautologioiden avulla voimme puristaa uutta tietoa jo tunnetuista tosiasioista. Yksinkertaisissa tilanteissa kuten yllämainitussa se saattaa tuntua hieman turhalta, mutta monimutkaisissa propositiolauseissa se ei olekaan yhtä helppoa.

Propositiolause on **tautologia**, jos sen totuusarvo on 1 totuusjakaumasta riippumatta. Tämä voidaan tarkistaa totuustaulusta.

Esimerkkejä tautologioista:

Esimerkki 1.1

$$(p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$$

$$A \vee \neg A$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Yllä mainituista esimerkeistä voitaisiin tehdä totuustaulut ja niistä näkisi, että ne ovat todella tautologioita.

1.4.2 Toteutuvuus

Propositiolause on **toteutuva**, jos se saa totuusarvon 1 vähintään yhdessä totuusjakaumassa. Tämä voidaan tarkistaa totuustaulusta.

Toteutuvan lauseen sanominen on, kuin sanoisi jotain mikä voisi teoriassa olla totta. Esimerkiksi, jos sanon “Sataa vettä mutta ei lunta”, saatan olla väärässä tämän hetkisestä säästä, mutta on hyvin mahdollista, että alkaisi sataa vettä, muttei lunta. Samoin lause “Juna liikkuu ja ovi on auki” on hyvinkin toteutuva, koska voimme helposti kuvitella tilanteen jossa juna liikkuu ja sen ovet ovat auki. Propositiologiikassa voimme tutkia lauseen toteavuutta katsomalla sen totuustaulua.

Esimerkkejä toteutuvista propositiolauseista:

Esimerkki 1.2 *Seuraavat kaavat ovat esimerkkejä toteutuvista propositiolauseista:*

$$(p_0 \to p_1) \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1$$

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem`

$$(p_0 \lor (p_1 \lor p_2)) \land \neg p_0 \land \neg p_2$$

$$\neg(p_0 \lor p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \land p_1)$$

Yllä mainituista esimerkeistä voitaisiin tehdä totuustaulut ja niistä näkisi että ne ovat todellakin toteutuvia.

1.4.3 Kontingenssi

Propositiolause on **kontingentti** silloin, kun sen totuusarvo on 1 joidenkin totuusjakaumien kohdalla ja 0 toisten. Tämä voidaan tarkistaa totuustaulusta.

Arkikielessä kontingenssi on jotakin, joka voisi olla tosi mutta luultavasti ei ole. Lentokone voi menettää yhden moottorinsa ja silti lentää turvallisesti, mutta kahden moottorin menettäminen päättyisi katastrofiin. Tällaisen kontingenssin varalta lentäjillä on luultavasti hätätoimenpiteitä. Propositiologiikassa kontingentti lause on propositiolause, joka voi olla toteutuva, mutta jonka negaatio voi myös olla toteutuva.

Esimerkki 1.3

$$(p_0 \to p_1) \land \neg p_0 \land \neg p_1$$

$$\neg(p_0 \to (p_0 \to p_1))$$

$$\neg(p_0 \lor p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \land p_1)$$

Yllä mainituista esimerkeistä voitaisiin tehdä totuustaulut ja niistä näkisi että ne ovat todella kontingentteja.

1.4.4 Kumoutuva

Propositiolause on **kumoutuva**, jos sillä voi olla totuusarvo 0 jossain totuusjakaumassa. Tämä voidaan tarkistaa totuustaulusta.

Arkikielessä kumoutuva lause on lause joka saattaa mahdollisesti olla tosi, mutta ainakin tiedämme varmasti, että se voi olla epätosi, esimerkiksi "Jos sataa, niin myös tuulee idästä". Opettaja saattaa huutaa oppilaalleen "Joko olet myöhässä tai jätät kirjasi kotiin!". Oppilas saattaa vastata "Eilen olin ajoissa ja minulla oli kirjani mukana" jolloin opettajan väite oli kumouttu. Kun joku esittää väitteen universaalina totuutena saattaa joku yrittää kumota tätä väitettä. Jos hän onnistuu ei väite enää ole universaali totuus. Logiikassa kaavan kumoutuvuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että vähintään yhdessä totuusjakaumassa kaava on epätosi.

Esimerkki 1.4 *Tässä on joitain kumottavissa olevia propositiolauseita:*

$$(p_0 \to p_1) \land \neg p_0 \land \neg p_1$$

$$\neg(p_0 \to (p_0 \to p_1))$$

$$\neg(p_0 \lor p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \land p_1)$$

Yllä mainituista esimerkeistä voitaisiin tehdä totuustaulut ja niistä näkisi että ne ovat todella falsifioitavia.

1.4.5 Ristiriita

Propositiolause on **ristiriita** tai **ristiriitainen**, jos sen totuusarvo on 0 kaikissa totuusjakaumissa. Tämä voidaan tarkistaa totuustaulusta.

Arkikielessä ihminen puhuu ristiriitaisesti, jos hän sanoo jotain mikä ei voi olla totta jo pelkästään ilmaisumuotonsa takia, kuten "Sataa ja ei sada". Ristiriita saattaa myös olla hieman vaikeampi huomata kuten "Ei tuule eikä sada mutta ehdottomasti sataa". Keskustelussa henkilö saattaa sanoa jotain, joka on ristiriidassa hänen aikaisemman sanomansa kanssa. Kun tämä tapahtuu joutuvat henkilön väitteet hyvin nopeasti kiistanalaisiksi eikä häntä oteta enää todesta.

Esimerkki 1.5 *Tässä on joitain esimerkkejä ristiriidoista:*

$$(p_0 \lor p_1) \land \neg p_1 \land \neg p_0$$

$$A \land \neg A$$

$$(A \to B) \land A \land \neg B$$

$$(A \lor B) \land \neg A \land \neg B$$

Jokaisessa tapauksessa voisimme rakentaa totuustaulun ja nähdä, että niillä kaikilla on totuusarvo 0 totuusjakaumast riippumatta.

1.4.6 Propositiolauseiden kategoriat

Jokainen propositiolause on joko tautologia, kontingenssi tai ristiriita. Tämä johtuu siitä, että totuustaulussa pääkonnektiivin alla on, joko sarake täynnä ykkösiä, nollia, tai sekoitus näitä molempia. Jos kaikissa totuusjakaumissa propositiolause on tosi, niin se on tautologia, jos kaikissa totuusjakaumissa propositiolause on epätosi niin se on ristiriita, ja jos se vaihtelee toden ja epätoden välillä, niin silloin se on kontingenssi. Muita vaihtoehtoja ei ole.

Tämän lisäksi voidaan sanoa, että jokainen toteutuva propositiolause on joko tautologia tai kontingenssi, ja jokainen kumoutuva propositiolause on joko ristiriita tai kontingenssi.

Kun loogikko katsoo propositiolausetta, hän yrittää välittömästi selvittää onko se tautologia, ristiriita vai kontingenssi. Nämä ovat propositiolauseiden kolme peruspiirrettä ja nämä antavat vihjeitä, mihin suuntaan kaavan kanssa kannattaa lähteä.

1.4.7 Miljoonan dollarin kysymys

Nyt tulee miljoonan dollarin kysymys: Onko mahdollista, polynomiajassa, selvittää onko annettu propositiolause tautologia, ristiriita, vai kontingenssi. **Polynomiaika** tarkoittaa seuraavaa: Jos propositiolauseessa on n symbolia, niin sinun tarvitsee tehdä vain n^k peruslaskutoimitusta saadaksesi vastauksen. Toronton Clay Matemaattinen Instituutti[2] on luvannut miljoona dollaria sille joka ratkaisee tämän ongelman. Pulma tunnetaan myös nimellä $P = NP$-ongelma[3].

1.4.8 Totuustaulujen epäkäytännöllisyys

Emme voi aina käyttää totuustauluja, koska ne hyvin nopeasti kasvavat liian suuriksi. Esimerkiksi jos käytämme propositiolausetta jossa on yli 100 symbolia, mikä ei ole kovin harvinaista teollisessa logiikan käytössä, meillä on yli 10^{30} riviä totuustaulussamme!

1.4.9 Looginen ekvivalenssi ja looginen seuraus

Kahta propositiolausetta kutsutaan *(loogisesti) ekvivalenteiksi* jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia. Toisin sanoen kaavoilla on sama totuusarvo jokaisessa totuusjakaumassa. Propositiolauseiden ekvivalenssia käytetään arkikielessä ja tieteessä jatkuvasti, usein ilman että siihen kiinnitetään juurikaan huomiota. Jos haluat nähdä joitakin tunnettuja loogisia ekvivalensseja, katso Kuva 1.1.

[2] http://www.claymath.org/millennium/

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem

Kaava	Vastaava kaava	Vastaavan kaavan nimi
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganin lait
$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganin lait
$\neg\neg A$	A	Tuplanegaation sääntö
$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$	
$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	Vaihdannaisuus
$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$	Vaihdannaisuus sääntö
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Osittelulaki
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Osittelulaki
$A \wedge A$	A	Idempotenssi
$A \vee A$	A	Idempotenssi

Taulukko 1.1: Loogiset ekvivalenssit.

Kaava	Looginen Seuraus
$A \wedge B$	A
$A \wedge B$	B
A	$A \vee B$
B	$A \rightarrow B$
$\neg A$	$A \rightarrow B$

Taulukko 1.2: Loogiset seuraukset.

Propositiolause B on *looginen seuraus* propositiolauseelle A jos $A \rightarrow B$ on tautologia. Toisin sanoen aina kun A saa totuusarvon 1, niin B saa myös totuusarvon 1. Samalla tavalla kuin loogista ekvivalenssia, myös loogista seurausta käytetään arkikielessä ja tieteessä usein ilman, että siihen juurikaan kiinnitetään huomiota. Jos haluat nähdä joitain yksinkertaisia loogisia seurauksia katso Kuva 1.2.

1.4.10 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 37 *Käytä totuustaulumenetelmää ja päättele onko propositiolause $\neg p_0 \vee \neg\neg p_0$ tautologia, kontingenssi vai ristiriita.*

Ratkaisu: Totuustaulussa on vain kaksi riviä, joten tämä tulee olemaan helppoa. Ensin täytämme propositiosymbolin p_0:n sarakkeet. Sitten kolmen negaation sarakkeet, ja lopulta disjunktio.

p_0	$\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$\neg$	p_0
1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0

Lause on tautologia. □

Tehtävä 38 *Käytä totuustaulumenetelmää ja päättele onko propositiolause $\neg p_0 \rightarrow p_1$ tautologia, kontingenssi vai ristiriita.*

Ratkaisu: Meillä on nyt neljä riviä totuustaulussamme. Ensin täytämme propositiosymbolejen sarakkeet. Sitten negaation ja lopulta implikaation.

p_0	p_1	$\neg$	p_0	$\to$	p_1
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0

Lause on kontingenssi. □

Tehtävä 39 *Käytä totuustaulu menetelmää ja päättele onko propositiolause $\neg(p_0 \to p_1) \wedge \neg p_0$ tautologia, kontingenssi vai ristiriita.*

Ratkaisu: Taas, meillä on neljä riviä. Ensin täytämme propositiosymbolejen sarakkeet. Sitten implikaation. Seuraavaksi kahden negaation sarakkeet, ja lopulta konjunktion.

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\to$	$p_1)$	$\wedge$	$\neg$	p_0
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0

Lause on ristiriita. □

1.4.11 Tehtävät

Tehtävä 40 *Käytä totuustaulumenetelmää ja ratkaise seuraavat tehtävät:*

1. *Onko propositiolause $p_0 \to \neg p_0$ tautologia, kontingenssi vai ristiriita.*
2. *Onko propositiolause $p_0 \vee \neg(p_0 \wedge p_1)$ tautologia, kontingenssi vai ristiriita.*

Tehtävä 41 *Käytä totuustaulu menetelmää ja ratkaise seuraavat tehtävät:*

1. *Ovatko propositiolauseet $p_0 \to p_1$ ja $\neg(p_1 \to p_0)$ loogisesti ekvivalentteja.*
2. *Ovatko propositiolauseet $\neg p_0 \vee p_1$ ja $\neg(p_0 \wedge p_1)$ loogisesti ekvivalentteja.*

Tehtävä 42 *Käytä totuustaulumenetelmää osoittaaksesi, että seuraavat lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. *$\neg(A \wedge B)$ ja $\neg A \vee \neg B$*
2. *$\neg\neg A$ ja A*
3. *$A \wedge A$ ja A*
4. *$A \vee A$ ja A*

Tehtävä 43 *Käytä totuustaulumenetelmää osoittaaksesi, että seuraavat lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. *$A \to B$ ja $\neg A \vee B$*
2. *$A \leftrightarrow B$ ja $(A \to B) \wedge (B \to A)$*

Tehtävä 44 *Käytä totuustaulumenetelmää osoittaaksesi, että seuraavat lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. *$A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$*
2. *$A \wedge (B \wedge C)$ ja $(A \wedge B) \wedge C$*

Tehtävä 45 *Käytä totuustaulumenetelmää osoittaaksesi, että seuraavat lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. *$A \wedge (B \vee C)$ ja $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$*
2. *$A \vee (B \wedge C)$ ja $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$*

Tehtävä 46 *Käytä totuustaulumenetelmää osoittaaksesi, että seuraavat lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. *$A \to (B \to C)$ ja $B \to (A \to C)$*
2. *$A \to (B \to C)$ ja $(A \wedge B) \to C$*

Tehtävä 47 *Näytä että implikaatioiden $p_i \to p_{i^*}$ konjunktio ei ole tautologia jos ja vain jos on olemassa i siten, että i ei ole i^*.*

Tehtävä 48 *Määrittele propositiolauseille, jotka koostuvat pelkistä negaatioista $\neg$, konjunktioista $\wedge$ ja disjunktioista $\vee$:*

1. *$(p_i)^+ = p_i, (p_i)^- = \neg p_i$*
2. *$(\neg A)^+ = A^-, (\neg A)^- = A^+$*
3. *$(A \wedge B)^+ = A^+ \wedge B^+, (A \wedge B)^- = A^- \vee B^-$*
4. *$(A \vee B)^+ = A^+ \vee B^+, (A \vee B)^- = A^- \wedge B^-$*

LAusetta A^+ kutsutaan A:n negaationormaalimuodoksi. Siinä on negaatioita pelkästään propositiosymbolien edessä.

1. *Laske* $(\neg((p_0 \wedge p_1) \vee p_2))^+$.
2. *Näytä, että A^+ ja A ovat ekvivalentteja.*
3. *Näytä, että A^- ja $\neg A$ ovat ekvivalentteja.*

Tehtävä 49 *Määrittele propositiolauseille jotka koostuvat vain negaatiosta $\neg$, konjunktiosta $\wedge$ ja disjunktiosta $\vee$, jotka ovat negaationormaalimuodossa:*

1. $(p_i)^* = p_i$
2. $(\neg p_i)^* = \neg p_i$
3. $(A \wedge B)^* = A^* \vee B^*$
4. $(A \vee B)^* = A^* \wedge B^*$

Propositiolause A^* on A:n duaali, ja se saadaan A:sta vaihtamalla konjunktiot disjunktioiksi. Mikä on propositiolauseen $(p_0 \vee \neg p_1) \wedge p_2$ duaali? Näytä, että jos A on tautologia, niin silloin myös $\neg A^*$ on tautologia. Näytä, että jos A ja B ovat ekvivalentteja, niin silloin myös A^* ja B^* ovat ekvivalentteja.

Tehtävä 50 *Olettakaamme että A on propositiolause joka sisältää propositiosymbolit $p_0, \ldots, p_{n-1}$. Antakaamme A_i olla jokaiselle $i = 0, \ldots, n-1$ mielivaltainen propositiolause. Antakaamme A':n olla tulos kun A_i sijoitetaan A:han p_i:n tilalle kaikilla $i = 0, \ldots, n-1$. Näytä, että jos A on tautologia, niin silloin myös A' on tautologia.*

Tehtävä 51 *Topologinen tulkinta on topologinen avaruus E ja funktio f propositiosymboleista avoimiin joukkoihin avaruudessa E. Laajennamme tämän propositiolauseisiin jotka koostuvat negaatiosta $\neg$, konjunktioista $\wedge$ ja disjunktiosta $\vee$:*

1. $f(A \wedge B) = f(A) \cap f(B)$
2. $f(A \vee B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(\neg A) = Int(E - f(A))$, *$f(A)$:n komplementin sisäpisteistö.*

Näytä että A on tautologia jos ja vain jos $f(A) = E$ jokaisessa topologisessa tulkinnassa missä E on diskreetti avaruus. A on niin sanottu konstruktiivinen tautologia jos $f(A) = E$ jokaisessa topologisessa tulkinnassa. Näytä että $\neg(A \wedge \neg A)$ on konstruktiivinen tautologia, mutta $A \vee \neg A$ ei ole.

1.5 Totuusfunktio

1.5.1 Mitä totuusfunktiot ovat

Totuusfunktiot ovat yleistyksiä tutuista konnektiiveista $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Keskittymällä totuusfunktion yleiseen käsitteeseen voimme paremmin ymmärtää myös konnektiiveja.

Tietokoneet perustuvat totuusfunktioihin ja tämä on yksi keskeisimmistä syistä miksi tutkimme totuusfunktioita. Totuusfunktioilla on myös mielenkiintoisia matemaattisia ominaisuuksia ja niillä on läheinen yhteys propositiolauseihin.

1.5.2 Totuusfunktio

Totuusfunktio, tai konnektiivi, on funktio f joukosta $\{0,1\}^n$ joukkoon $\{0,1\}$ jollekin n. Totuusfunktiota jossa on n muuttujaa kutsutaan n-paikkaiseksi totuusfunktioksi. Lisäksi 1-paikkaisia ja 2-paikkaisia totuusfunktioita kutsutaan unaarisiksi ja binäärisiksi totuusfunktioiksi. Totuusfunktiot voidaan identifioida totuustaulujen kanssa, koska voimme yksinkertaisesti listata kaikki totuusfunktion arvot. Huomaa, että tässä on iso ero funktioihin jotka on määritelty äärettömissä joukoissa kuten $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{R}$. Totuusfunktiolla on vain rajallinen määrä argumentteja ja voimme yksinkertaisesti tehdä niistä listan niiden saamien arvojen kanssa. Näitä listoja kutsutaan totuustauluiksi.

Olemme jo määritelleet konnektiivit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Voimme samaistaa ne vastaavien totuusfunktioiden kanssa. Eli konnektiivi on symboli jolla on erityinen merkitys, mutta voimme myös ajatella että se on totuusfunktio. Negaatio on totuusfunktio joka kuvaa $0 \mapsto 1$ ja $1 \mapsto 0$. Konjunktio on kaksipaikkainen totuusfunktio joka kuvaa $(1,1) \mapsto 1$, $(0,1) \mapsto 0$, $(1,0) \mapsto 0$ ja $(0,0) \mapsto 0$.

1.5.3 Lisää kaksipaikkaisia totuusfunktioita

Tässä on muutama esimerkki totuusfunktioista:

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Tässä funktion arvo on koko ajan 1. Tämä ei ole kiinnostava funktio, mutta totuusfunktio siitä huolimatta.

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tämän funktion arvo on 1 vain jos x ja y ovat eri arvoja.

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Kolmas funktiomme on jälleen vakiofunktio. Tällä kertaa funktion arvo on aina 0. Sivutamme nytkin kysymyksen, kuinka mielenkiintoinen tämä funktio on, koska matemaattisesti kaikki funktiot ovat samanveroisia.

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Neljäs totuusfunktiomme saattaa näyttää tutulta: tämä on ekvivalenssin totuustaulu. Tutut konnektiivit tulevat esiin totuusfunktioina, mutta on myös muita.

1.5.4 16 kaksipaikkaista totuusfunktioita

Kaksipaikkaisia totuusfunktioita on tasan 16. Alla oleva taulukko näyttää kaikki 16. Neljäs sarake x:n ja y:n arvojen jälkeen näyttää x:n negaation, ja kaksi saraketta eteenpäin on y:n negaatio.

x	y				$\neg$		$\neg$			$\wedge$	$\leftrightarrow$		$\rightarrow$			$\vee$	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Hyppäämme kahden funktion yli ja päädymme konjunktion ja sitten ekvivalenssin totuustauluihin. Sitten näemme y:n identiteettifunktion ja sitten implikaation totuustaulun. Seuraavaksi on x:n identiteettifunktio. Toiseksi viimeisenä on disjunktion totuustaulu ja viimeisenä vakiofunktio 1.

Tärkeät konnektiivit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ näyttävät ilmenevän varsin tavallisina muiden kaksipaikkaisten totuusfunktioiden vierellä. Niiden tärkeä rooli meidän elämässä ei tuosta taulukosta käy mitenkään erikoisesti ilmi. Itse asiassa monet totuusfunktiot olisivat voineet ilmetä kielessämme ja jättää konnektiivit varjoonsa. Miksi tätä ei tapahtunut? Kun etenemme saatamme ymmärtää miksi konnektiivit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ovet niin tärkeitä.

Jos tekisimme taulukon kaikille 3-paikkaisille totuusfunktioille se olisi paljon pitempi ja monimutkaisempi tehdä.

1.5.5 3-paikkainen totuusfunktio

Tässä on esimerkki 3-paikkaisesta totuusfunktiosta.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Tällä totuusfunktiolla ei ole mitään erikoista intuitiivista merkitystä, mutta kohta opimme miten totuusfunktio voidaan liittää propositiolauseeseen. Silloin tämä propositiolause voi antaa intuitiivisen kuvan kyseisestä totuusfunktiosta.

1.5.6 Shefferin viiva

Tässä on tärkeä uusi konnektiivi nimeltään *Shefferin viiva*:

A	B	$A \mid B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Konnektiivin voi selittää arkikielellä toimivan samaan tapaan kuin “ei... ja...”. Kun opimme *määriteltävyydestä*, näemme että Shefferin viivalla on merkittäviä ominaisuuksia. Sen merkittävyys ei ole vain siinä, että sitä käytettäisiin arkikielessä sanoina “ei...ja...” vaan siinä, että se pystyy määrittelemään kaikki muut konnektiivit, kuten tulemme näkemään.

1.5.7 Totuusfunktioiden määriteltävyys

Määriteltävyys on erittäin tärkeä käsite logiikassa. Totuusfunktio f voidaan *määritellä* totuusfunktioiden $g_1, ..., g_m$ avulla jos f voidaan esittää yhdistämällä funktioista $g_1, ..., g_m$. Käytännössä tämä merkitsee seuraavaa:

Disjunktio voidaan määritellä negaation ja konjunktion avulla:

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

Teknisesti konnektiivi $\vee$ voidaan saada yhdistämällä konnektiivit $\neg$ ja $\wedge$.

Shefferin viiva voidaan määritellä negaation ja konjunktion avulla:

$$A|B = \neg(A \wedge B).$$

Täten myös negaatio ja konjunktio voidaan määritellä Shefferin viivan avulla:

$$\neg A = A|A$$

$$A \wedge B = (A|B)|(A|B)$$

Näemme Shefferin viivassa mielenkiintoisen ominaisuuden. Sen avulla voi määritellä negaation ja konjunktion. Koska disjunktio voidaan määritellä negaation ja konjunktion avulla, voimme päätellä, että disjunktion voi myös määritellä Shefferin viivan avulla. Tämä Shefferin viivan mielenkiintoinen ominaisuus on nimeltään *universaalisuus*.

1.5.8 Universaalinen konnektiivijoukko

Totuusfunktioiden joukko T on **universaalinen**, jos kaikki totuusfunktiot voidaan määritellä T:n funktioiden avulla. Funktio f on **universaalinen**, jos joukko $\{f\}$ on. Käy ilmi, perustelemme tämän myöhemmin, että kaikki totuusfunktiot voidaan määritellä Shefferin viivan avulla, eli Shefferin viiva on universaalinen. Mikroprosessorit ovat rakennettu “porteista” jotka ovat olennaisesti konnektiiveja. Riittää valmistaa Shefferin viiva (tunnetaan myös nimellä NAND) portteja koska muut konnektiivit voidaan luoda niistä. Myös $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}$ ovat universaalisia, mutta kaikki tämä pitää todistaa joten jatkakaamme.

1.5.9 Propositiolauseen määrittelemä totuusfunktio

Oletetaan, että A on propositiolause joka koostuu propositiosymboleista $p_1, ..., p_n$. A määrittelee seuraavan totuusfunktion:

$$f_A(x_1, ..., x_n) = \begin{array}{l} A\text{:n totuusarvo} \\ \text{totuusjakaumassa} \\ \text{joka antaa } p_i\text{:lle arvon} \\ x_i \text{ kun } i = 1, ..., n \end{array}$$

Esimerkiksi,

$$f_{\neg p_1}(x_1) = \begin{cases} 1, \text{ jos } x_1 = 0 \\ 0, \text{ jos } x_1 = 1 \end{cases}$$

$$f_{p_1 \wedge p_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ jos } x_1 = x_2 = 1 \\ 0, \text{ muuten} \end{cases}$$

$$f_{\neg p_1 \vee p_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ jos } x_1 = 1 \text{ ja } x_2 = 0 \\ 1, \text{ muuten} \end{cases}$$

$f_{\neg p_1}(x_1)$ on $\neg p_1$:n totuusarvo totuusjakaumassa $v(p_1) = x_1$. Eli $f_{\neg p_1}(x_1)$ on 1 jos $x_1 = 0$ ja 0 jos $x_1 = 1$.

Samoin, $f_{p_1 \wedge p_2}(x_1, x_2)$ on $p_1 \wedge p_2$:n totuusarvo totuusjakaumassa $v(p_1) = x_1$, $v(p_2) = x_2$. Eli $f_{p_1 \wedge p_2}(x_1, x_2)$ on 1 jos $x_1 = x_2 = 1$ ja muuten 0.

Viimein, $f_{\neg p_1 \vee p_2}(x_1, x_2)$ on $\neg p_1 \vee p_2$:n totuusarvo totuusjakaumassa $v(p_1) = x_1$, $v(p_2) = x_2$. Eli,

$f_{\neg p_1 \vee p_2}(x_1, x_2)$ on 0 jos $x_1 = 1$ ja $x_2 = 0$, ja muuten 1.

Olipa A mikä tahansa propositiolause, voimme hyvin helposti määritellä totuusfunktion f_A rakentamalla A:n totuustaulun. Tämä on hyvin kätevä tapa määritellä totuusfunktioita, itse asiassa niin kätevä, että jokainen totuusfunktio on muotoa f_A jollekkin A.

1.5.10 Propositiolauseet kattavat kaikki totuusfunktiot

Näytämme nyt, että kaikki totuusfunktiot voidaan esittää muodossa f_A jollakin A.

Lause 1.6 *Jokainen totuusfunktio voidaan määritellä propositiolauseella.*

Katsotaan totuusfunktiota f ja keskitytään niihin riveihin, missä f saa totuusarvon 1. Yksinkertaisesti unohdetaan rivit missä f:n totuusarvo on 0. Kuvaillaan f näiden rivien "disjunktiona".

Jotta nähdään mitä tämä tarkoittaa, katsotaan seuraavaa esimerkkiä:

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

On kolme riviä missä f:n totuusarvo on 1. Kutsutaan näitä *1-riveiksi*. Nyt käytetään niksiä: tiedetään, että useamman propositiolauseen disjunktiolla on totuusarvo 1, kun vähintään yhdellä sen disjunktilla on totuusarvo 1. Eli etsimme kolmen kaavan disjunktiota – koska totuustaulusta löytyy kolme 1-riviä – ja varmistamme, että jokainen disjunkti on tosi täsmälleen yhdellä 1-rivillä.

1.5.11 Totuusfunktiosta kaavaan

Etsimme propositiolauseita, joiden totuustauluissa ovat samat rivit, kun totuusfunktion f 1-riveissä.

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee \\ & (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee \\ & (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \end{aligned}$$

Tämä valinta toimii mainiosti! Kokeillaan nyt: f:n totuustaulun ensimmäisellä 1-rivillä on $x = y = z = 1$. Tämä vastaa totuusjakaumaa missä $v(p_0) = v(p_1) = v(p_2) = 1$. Tässä totuusjakaumassa ensimmäisestä disjunktista ja täten myös koko disjunktiosta tulee tosi. Entäs toinen 1-rivi? Tässä on $x = z = 1$ ja $y = 0$. Tämä vastaa totuusjakaumaa missä $v(p_0) = v(p_2) = 1$ ja $v(p_1) = 0$. Tässä totuusjakaumassa toisesta (keskimmäisestä) disjunktista ja täten myös koko disjunktiosta tulee myös tosi. Viimeiseksi kolmas 1-rivi luo totuusjakauman missä lause A on myös tosi.

Mutta entä muut rivit, joissa f saa arvon 0? Mitä tapahtuu A:lle näissä totuusjakaumissa. Oletetaan, että meillä on totuusjakauma missä A saa totuusarvon 1. Silloin se antaa arvon 1 vähintään yhdelle disjunktille, esimerkiksi viimeiselle $(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2)$. Täten $v(A) = 1$ totuusjakaumalle joka toteuttaa $v(p_0) = v(p_2) = 0$ ja $v(p_1) = 1$. Mutta tämä on kolmas 1-rivi f:n totuustaulua, joten f on tällä rivillä 1. Jos käymme kaikki tilanteet läpi missä $v(A)$ voi olla 1, niin näemme että $f = f_A$. Jos totuusfunktiossa ei ole yhtään 1-riviä, niin annamme A:n olla $p_0 \wedge \neg p_0$.

1.5.12 Sovelluksia

Toinen asia minkä havaitsimme kun muutimme totuusfunktion kaavan muotoon on, että **jokainen totuusfunktio voidaan määritellä konnektiivien $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ avulla.** Täten $\{\neg, \wedge, \vee\}$ on universaali joukko konnektiiveja, tai jopa vain $\{\neg, \wedge\}$, koska $\vee$ voidaan määritellä konnektiivin $\neg$ ja $\wedge$ avulla. Lisäksi, jokaisesta propositiolauseesta A voidaan luoda totuusfunktio f_A. Tästä totuusfunktiosta f_A voidaan sitten taas luoda toinen propositiolause B siten, että käytetään pelkästään konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ ja f_A=f_B. A:lla ja B:llä on siis samat totuustaulut, joten ne ovat *loogisesti ekvivalentteja*. Täten jokainen propositiolause A voidaan ilmaista loogisesti ekvivalentissa muodossa

$$A_1 \vee ... \vee A_n,$$

missä jokainen A_i on muotoa

$$B_1 \wedge ... \wedge B_m,$$

ja jokainen B_i on propositiosymboli tai sen negaatio. Tätä kutsutaan A:n *disjunktiiviseksi normaalimuodoksi*. Tämä muoto ei ole yksikäsitteinen, samalla A:lla saattaa olla sama totuustaulu useiden eri disjunktiivista normaalimuotoa olevien kaavojen kanssa.

Esimerkiksi, $p_0 \to p_1$:n eräs disjunktiivinen normaalimuoto on:

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1).$$

Toisaalta, tämä ei ole yksinkertaisin tapa ilmaista $p_0 \to p_1$:n disjunktiivisessa normaalimuodossa. Tässä on paljon yksinkertaisempi tapa:

$$\neg p_0 \vee p_1.$$

Kaavan disjunktiivisen normaalimuodon löytäminen on tärkeä työkalu, joka autaa ymmärtämään kaavaa paremmin .

1.5.13 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 52 *Määrää propositiolauseen $(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2$ määrittelemä totuusfunktio.*

Ratkaisu: Tässä tehtävässä käytännössä pyydetään löytämään annetun propositiolauseen ($(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2$) totuustaulu. Totuusfunktio on kolmipaikkainen, koska siinä on kolme eri propositiosymbolia. Antakaamme x_0:n osoittaa p_0:n arvoa, x_1:n osoittaa p_1:n arvoa ja x_2:n osoittaa p_2: arvoa. Nyt tarvitsemme funktion $f(x_0, x_1, x_2)$ kolmelle muuttujalle x_0, x_1 ja x_2 siten, että jos $x_0 = v(p_0)$, $x_1 = v(p_1)$, ja $x_2 = v(p_2)$, niin silloin $f(x_0, x_1, x_2) = v((p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2)$. Rakennamme f:n taulun vaiheittain.

Jotta voimme löytää funktion $f(1, 1, 1)$ arvon, laskemme totuusarvon propositiolauseelle $(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2$ kun p_0, p_1, p_2 ovat kaikki tosia. Funktion arvo on 1.

Huomaamme, että propositiolause $(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2$ on totta silloin kuin p_2 on totta. Täten voimme täyttää kolme arvoa f:n tauluun.

Seuraava havaintomme on, että propositiolause $(p_0 \wedge \neg p_1) \to p_2$ on myös totta jos p_0 on epätosi koska silloin $p_0 \wedge \neg p_1$ on epätosi jolloin implikaatio on tosi.

On vain kaksi arvo laskettavana. Ensin tarvitsemme funktion $f(1, 1, 0)$ arvon. Tämä on 1. Sitten lopulta tarvitsemme funktion $f(1, 0, 0)$ arvon. Tämä on 0. Taulu on valmis.

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

□

Tehtävä 53 *Etsi seuraavissa tapauksissa propositiolause, käyttäen konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$, joka määrittelee annetun totuusfunktion.*

Ensimmäinen totuusfunktio:

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
1	*1*	*1*
1	*0*	*1*
0	*1*	*1*
0	*0*	*1*

Ratkaisu: *Tämä totuusfunktiosta saa vain totuusarvon 1. Totuusfunktio on siis vakiofunktio. Eli jos otamme kaavan $\neg p_0 \vee p_0$, se on täydellinen vastaus. Kaava on tautologia joten sen totuusarvo on aina 1. Ei ole mitään väliä että p_1 ei esiinny kaavassa, mutta sen lisääminen ei ole myöskään mikään ongelma. Jos lisäämme propositiosymbolin p_1 propositiolauseeseen, saamme lauseen $(p_0 \vee \neg p_0) \vee p_1$ joka myös määrittelee f:n. Tämä on kuitenkin turhaa.* □

Toinen totuusfunktio:

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
1	*1*	*0*
1	*0*	*1*
0	*1*	*1*
0	*0*	*0*

Ratkaisu: *Tämä ei ole vakiofunktio ja käytämme disjunktiivista normaalimuotomenetelmää jotta löydämme sen määrittelemän propositiolauseen. On kaksi 1-riviä, toinen ja kolmas rivi, joten rakennamme kahden kaavan disjunktion. Ensinmäinen disjunkti on $p_0 \wedge \neg p_1$ ja toinen disjunkti on $\neg p_0 \wedge p_1$. Joten kaava on $(p_0 \wedge \neg p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1)$. Nyt voimme helposti tarkastaa että tämä kaava todellakin määrittelee totuusfunktion f. Helpoin tapa tehdä tämä on käydä kaikki x_0:n ja x_1:n argumentit läpi ja tarkistaa, että propositiolauseemme ja totuusfunktiomme antavat samat totuusarvot kaikissa neljässä tapauksessa.* □

Kolmas totuusfunktio:

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ratkaisu: *Tämä on myös vakiofunktio. Siinä ei ole yhtään 1-riviä joten emme voi käyttää disjunktiivista normaalimuotoa vaikka haluaisimmekin. Sen sijaan käytämme maalaisjärkeä. Mikä tahansa ristiriita on epätosi kaikkien totuusjakaumien alla. Joten otamme, esimerkiksi, propositiolauseen $p_0 \wedge \neg p_0$. Tämä propositiolause määrittelee totuusfunktion joka aina antaa totuusarvon 0.* □

Neljäs totuusfunktio:

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ratkaisu: *Meillä on taas kerran kaksi 1-riviä. Meidän täytyy rakentaa kaava käyttäen vain ja ainoastaan konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ joten emme voi käyttää propositiolausetta $p_0 \leftrightarrow p_1$, vaikka se selvästi määrittelee annetun totuusfunktion. Joten joudumme käyttämään disjunktiivista normaalimuotomenetelmää. On kaksi 1-riviä, ensimmäinen ja neljäs, joten rakennamme kahden kaavan disjunktion. Ensimmäinen disjunkti on $p_0 \wedge p_1$ ja toinen disjunkti on $\neg p_0 \wedge \neg p_1$, joten kaava on $(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$. Nyt meidän täytyy tarkistaa, että tämä kaava todellakin määrittelee totuusfunktion. Kuten edellisessäkin esimerkissä, tämä voidaan tarkistaa käymällä kaikki funktion argumentit läpi ja tarkistamalla, että kaikissa neljässä tapauksessa totuusfunktio ja propositiolauseemme antavat saman totuusarvon.* □

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Kuva 1.4: A ternary truth function

Tehtävä 54 *Etsi propositiolause, käyttäen konnektiiveja $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$, joka määrittelee kuvan 1.4 totuusfunktion.*

Ratkaisu:

Tämä tehtävä selvästi tarvitsee disjunktiivisen normaalimuotomenetelmän käyttöä. Katsokaamme miten se toimii. Totuusfunktiossa on kuusi 1-riviä ja kaksi 0-riviä. On harmi että disjunktiivinen normaalimuoto menetelmä keskittyy vain 1-riveihin ja niitä on niin monia tässä esimerkissä. Mutta, käyttäkäämme niksiä. Keskittymällä 0-riveihin, voimme rakentaa propositiolauseen jonka **negaatio** määrittelee annetun totuusfunktion. Joten aloitamme määrittelevän kaavan negaatiolla ja sitten rakennamme kaavan jolla on 0-rivejen kohdalla totuusarvo 1. On kaksi 0-riviä, joten rakennamme negaation sisään kahden propositiolauseen disjunktion. ensinmäinen disjunkti on $p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$ ja toinen disjunkti on $\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$. Lopullinen propositiolause joka määrittelee totuusfunktion on:

$$\neg((p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2)).$$

Tämä propositiolause toimii mutta se näyttää olevan hyvin riippumaton p_0:n totuusarvosta, joten koettakaamme jotain yksinkertaisempaa, kuten:

$$\neg(p_1 \wedge p_2).$$

Meidän täytyy testata, että totuusfunktio, jonka propositiolause $\neg(p_1 \wedge p_2)$ määrittelee, on funktio f. Tämä on helppo tehdä. Huomaamme, että funktio $f(x_0, x_1, x_2)$ on täysin riippumaton x_0:sta aivan kuten totuusfunktio jonka tämä propositiolause määrittelee. Niille neljälle mahdolliselle x_1:n ja x_2:n arvolle huomaamme, että kaavamme määrittelemä totuusfunktio antaa samat arvot, joten olemme valmiita. □

Tehtävä 55 *Näytä, että kuvan 1.4 kolmipaikkainen totuusfunktio on universaali.*

Ratkaisu: Huomaa, että $f(x, x, x) = 1 - x$ ja $f(x, x, y) = 1 - xy$. Täten

$$f(f(x, x, y), f(x, x, y), f(x, x, y)) = xy.$$

Tämä todistaa että voimme ilmaista negaation ja konjunktion f:n avulla, mutta tiedämme jo, että $\{\neg, \wedge\}$ on universaali joukko. Joten olemme valmiita. □

Tehtävä 56 *Näytä, että konnektiivi joukko $\{\wedge, \vee\}$ ei ole universaali.*

Ratkaisu: On helppo nähdä, että mikä tahansa konnektiivi $f(x_1, ..., x_n)$ joka on määritelty konnektiivien $\wedge$ ja $\vee$ avulla toteuttaa $f(1, ..., 1) = 1$. Miten? Tämä ominaisuus pätee konnektiiveille $\wedge$ ja $\vee$, ja tämä ominaisuus säilyy kun konjunktiosta ja disjunktiosta määritellään lisää konnektiiveja. Joten tämä ominaisuus pitää paikkansa jokaiselle konnektiiville joka voidaan määritellä konjunktion ja disjunktion avulla. Tästä seuraa että negaatiota ei voida määritellä konnektiiveien $\wedge$ ja $\vee$ avulla. □

1.5.14 Tehtävät

Tehtävä 57 *Jokaisessa seuraavassa tapauksessa, anna propositiolause, käyttäen vain konnektiiveja $\neg$ ja $\rightarrow$, joka määrittelee annetun totuusfunktion.*

x_0	x_1	f
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

x_0	x_1	f
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

x_0	x_1	f
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x_0	x_1	f
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Tehtävä 58 *Näytä, että $\{\rightarrow\}$ ei ole universaali.*
Vihje: Näytä ensin, että mikä tahansa konnektiivi $f(x_1, \ldots, x_n)$, joka on määritelty konnektiivin $\rightarrow$ avulla, toteuttaa funktion $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Tehtävä 59 *Näytä, että $\{\neg\}$ ei ole universaali.*
Vihje: Mieti tarkasti minkälaisia totuusfunktioita voidaan määritellä vain käyttäen negaatiota. Ehkä kaikki ovat hyvin yksinkertaisia.

Tehtävä 60 *Näytä, että $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ ei ole universaali.*

Tehtävä 61 *Mitkä seuraavista propositiolauseista ovat disjunktiivisessa normaalimuodossa:*

1. p_1
2. $p_0 \vee p_1$
3. $\neg p_0 \wedge p_1$
4. $p_0 \leftrightarrow p_2$
5. $(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_3) \vee (\neg p_0 \wedge p_2 \wedge p_3)$
6. $(\neg p_0 \vee p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_0 \vee p_2 \vee p_3)$
7. $(p_0 \rightarrow p_1) \wedge (\neg p_0 \rightarrow p_2)$

Tehtävä 62 *Kuinka monta n-paikkaista totuusfunktiota on olemassa?*

Tehtävä 63 *Palauta mieleesi määritelmämme A:n todennäköisyydelle $p(A)$ Tehtävässä 34. Näytä, että:*

1. *A on tautologia jos ja vain jos $p(A) = 1$*
2. *A on ristiriita jos ja vain jos $p(A) = 0$*
3. *A on kontingenssi jos ja vain jos $0 < p(A) < 1$.*

1.6 Luonnollinen päättely

1.6.1 Mitä on päättely?

Päättely, jota kutsutaan myös deduktioksi tai todistukseksi, on kokoelma kaavoja jotka on muodostettu seuraamalla sovittuja sääntöjä eli *päättelysääntöjä*.

Päättely on yksinkertaistettu malli menetelmälle, jolla todistetaan teoreemoja matematiikassa ja muussa tieteessä.

Päättelyn tutkiminen alkoi Aristotelesta, joka antoi ensimmäiset päättelyn säännöt, ns. syllogismit, kuten seuraava:

Jokainen ihminen on kuolevainen.
Sokrates on ihminen.
Siis, Sokrates on kuolevainen.

Tämä kuulostaa hyvin vakuuttavalta, vaikka sanat "Sokrates", "ihminen" ja "kuolevainen" vaihtaisi mihinkä tahansa muuhun. Esimerkiksi "Anna", "suomalainen" ja "eurooppalainen":

Jokainen suomalainen on eurooppalainen.
Anna on suomalainen.
Siis, Anna on eurooppalainen.

On tärkeää myöntää heti alkuun, että harva kirjoittaa todistuksensa yhtä huolellisesti kuin me tämän kurssin aikana. Ehkä tietokone saattaisi, mutta ihminen, joka kirjoittaa lyijykynällä paperille, ei ainakaan. Käytännössä todistukset ovat ns. epämuodollisia todistuksia. Epämuodollisella todistuksella tieteentekijä voi vakuuttaa itsensä ja työtoverinsa siitä, että hänen johtopäätöksensä ovat korrekteja. Hän voi esimerkiksi tehdä useita kokeita tai vetää monia aikaisempia johtopäätöksiä yhteen ja siitä päätellä jotain uutta. Hän saattaa yrittää todistaa, että:

- silta ei romahda,
- pato ei petä,
- ydinvoimala ei sula,
- tietokoneohjelma ei kaadu,
- raketti ei räjähdä kun se laukaistaan
- jne.

Tällaisessa tilanteessa todistus – jos se on olemassa – voi olla niin monimutkainen, että ainoa tapa tarkastaa se on käyttää tietokonetta. Tämän takia, kun opimme todistamaan jotain muodollisesti, opimme tekemään sen hyvin erityisellä ja pikkutarkalla tavalla. On olemassa tietokoneohjelmia jotka auttavat ihmisiä kirjoittamaan erittäin muodollisia todistuksia, kuten "The Coq Proof Assistant".

Syy miksi haluamme käyttää yhtä tarkkaa tapaa todistaa asioita on se, että täten voimme valaista korrektien todistusten tärkeyttä ja voimme tarkastaa todistuksia helpommin.

1.6.2 Päättelyn monimutkaisuus

On helppoa tarkastaa onko jokin päättely oikea, eli onko päättely tehty sääntöjen mukaisesti. Jopa tietokone voi tarkistaa päättelyjen todellisuutta. Vaikein osa on päättelyn löytäminen. Iso osa matemaatikon, tai muun tieteentekijän työtä on yrittää selvittää jotain ja sitten todistaa, että se todella on näin.

1.6.3 Luonnollinen päättely

Luonnollinen päättely on tietty tapa kirjoittaa päättelyjä. Kuten jo sen nimikin vihjaa, se yrittää matkia ihmisen ajattelutapaa mahdollisimman hyvin.

Luonnollisessa päättelyssä meillä on joitain oletuksia $B_1, ..., B_n$ ja haluamme tehdä niistä johtopäätöksen A. Jos tämä on mahdollista kirjoitamme $\{B_1, \ldots, B_n\} \vdash A$ ja muuten kirjoitamme $\{B_1, \ldots, B_n\} \nvdash A$.

Päättelyt koostuvat yksinkertaisemmista päättelyistä ja oletuksista.

1.6.4 Yksinkertainen luonnollinen päättely

Tässä on yksinkertainen luonnollinen päättely:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathbf{T} \qquad \dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathbf{T}}{(A \wedge B) \wedge (A \wedge B)}\wedge\mathbf{T}$$

Katsokaamme sen komponentteja. Ylhäällä ovat oletukset A ja B. Jokainen vaakasuora viiva kuvastaa yhtä päättelysääntöä. Säännön nimi, tässä tapauksessa $\wedge I$, on päättelyviivan vieressä. Johtopäätös on pohjalla.

Näemme, että päättelyä

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathbf{T}$$

oli käytetty edellisessä päättelyssä kahdesti alipäättelynä. Näin päättelyt toimivat: ne koostuvat palasista jotka liitämme yhteen, ja jokainen palanen on pienempi päättely. Pienimmät päättelyt ovat yleensä samanlaisia kuin yllä näkyvä esimerkki, ne koostuvat vain yhdestä päättelyviivasta.

1.6.5 Konjunktion säännöt

Päättely syntyy periaatteessa liittämällä tiettyjä sääntöjä yhteen. Säännöt jotka koskevat konjunktiota, eli sanaa "ja", toimivat seuraavalla tavalla:

$\wedge$-Tuontisääntö:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathbf{T}$$

$\wedge$-Eliminointisääntö:

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathbf{E} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathbf{E}$$

$\wedge$-Tuontisäännön idea on hyvin yksinkertainen: jos tiedämme A:n ja B:n, niin tiedämme niiden konjunktion $A \wedge B$:n. $\wedge$-Eliminointisääntö toimii samalla tavalla: jos tiedämme $A \wedge B$ niin tiedämme myös A:n ja B:n.

1.6.6 Lauseen $(A \wedge B) \wedge C$ johtaminen lauseesta $A \wedge (B \wedge C)$

Katsokaamme konjunktioon liittyviä sääntöjä. Pystymme johtamaan lauseen $(A \wedge B) \wedge C$ lauseesta $A \wedge (B \wedge C)$.

Olettaen että $A \wedge (B \wedge C)$ pätee, tiedämme, että A, B ja C pitävät paikkansa ja, että ne voidaan johtaa kaavasta $A \wedge (B \wedge C)$ käyttäen $\wedge$-eliminointisääntöä.

Jotta voimme johtaa $(A \wedge B) \wedge C$:n, meidän pitää ensin johtaa $A \wedge B$ ja sitten yhdistää tämä C:n kanssa, joka taas voidaan johtaa kaavasta $A \wedge (B \wedge C)$ käyttäen $\wedge$-eliminointisääntöä ja näin saamme $(A \wedge B) \wedge C$.

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A} \wedge \mathbf{E} \quad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C} \wedge \mathbf{E}}{B} \wedge \mathbf{E}}{A \wedge B} \wedge \mathbf{T} \quad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C} \wedge \mathbf{E}}{C} \wedge \mathbf{E}}{(A \wedge B) \wedge C} \wedge \mathbf{T}}$$

Nyt päättelyyn. Ensin johdamme A:n, sitten B:n joten meillä on $A \wedge B$. Seuraavaksi johdamme C:n ja laitamme kaikki yhteen. Koko päättelyprosessin näkee yllä olevasta kuvasta.

1.6.7 Todistus tapauksittain

Usein matematiikassa todistetaan asioita "todistus tapauksittain" menetelmällä. Tässä on esimerkki.

Oletetaan, että haluamme todistaa, että $n^2 + 7n$ on parillinen kaikilla n arvoilla. Mahdollinen todistus etenee seuraavasti:

- Tiedämme että kaikki luonnolliset luvut ovat joko parillisia (eli voidaan ilmaista muodossa $2m$) tai parittomia (eli voidaan ilmaista muodossa $2m + 1$).
- Ottakaamme mielivaltainen luonnollinen luku n.
- Tapaus 1: n on parillinen, toisin sanoen $n = 2m$: $n^2+7n = 4m^2+14m = 2(2m^2+7m)$ on parillinen.
- Tapaus 2: n on pariton, toisin sanoen $n = 2m + 1$: $n^2 + 7n = (2m+1)^2 + 7(2m+1) = 4m^2 + 4m + 1 + 14m + 7 = 4m^2 + 18m + 8 = 2(2m^2 + 9m + 4)$ on parillinen.
- Eli molemmissa tapauksissa $n^2 + 7n$ on parillinen.
- Siis $n^2 + 7n$ on aina parillinen.

1.6.8 Todistuksen rakenne

Yllä mainitun todistuksen rakenne on seuraavanlainen. Haluamme todistaa että $n^2 + 7n$ on parillinen. Tiedämme että n on parillinen tai pariton. Huomaa, että tämä on disjunktio. Tiedämme myös, että jos n on parillinen niin n^2+7n on myös parillinen. Tiedämme myös, että jos n on pariton niin $n^2 + 7n$ on jälleen parillinen. Eli $n^2 + 7n$ on parillinen, olipa n parillinen tai pariton. Todistus kuvana:

$$\dfrac{n \text{ parill. tai parit.} \qquad \begin{matrix} n \text{ parill.} \\ \vdots \\ n^2 + 7n \text{ parill.} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} n \text{ parit.} \\ \vdots \\ n^2 + 7n \text{ parill.} \end{matrix}}{n^2 + 7n \text{ parill.}}$$

1.6.9 Todistus tapauksittain

Jos mietimme hieman tarkempaan mitä yllä olevassa kuvassa tapahtuu, käy ilmi, että voimme esittää saman asian seuraavalla kuvalla:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix} [A] \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [B] \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}$$

Tiedämme $A \vee B$:n, ja voimme todistaa C:n jos oletamme A:n ja myös jos oletamme B:n. Joten koska $A \vee B$ on oletettu, voimme pitää C:tä totena.

1.6.10 Olettaminen

Kun todistamme tapauksittain teemme *tilapäisiä* oletuksia, kuten "jos n on pariton" tai "jos n on parillinen". Luonnollisessa päättelyssä voimme tehdä tilapäisiä oletuksia, kunhan pystymme eliminoimaan oletuksemme jossain vaiheessa. Kun tilapäinen oletus A on eliminoitu, se laitetaan hakasulkeisiin $[A]$. Tilapäisen oletuksen eliminoiminen ei ole aina pakollista, sitä pitäisi ajatella enemmän oikeutena kuin velvollisuutena. Toisaalta jos tilapäistä oletusta ei eliminoida se saattaa heikentää luonnollista päättelyä ja johtopäätöstä.

On tärkeätä pystyä erottamaan oletukset ja tilapäiset oletukset toisistaan. Tilapäiset oletukset tulevat yleensä siitä, kun tiedämme disjunktion ja haluamme tehdä siitä johtopäätöksen. Tällöin tilapäisesti oletamme ensimmäisen disjunktin ja sen jälkeen toisen, nähdäksemme mitä tapahtuu. Edellisessä esimerkissä tiesimme, että n on joko parillinen tai pariton, mutta emme tienneet kumpi, joten oletimme väliaikaisesti, että n on parillinen ja sitten, että n on pariton.

1.6.11 Disjunktion säännöt

Olemme nyt valmiita kirjoittamaan disjunktiota koskevat säännöt luonnollisessa päättelyssä.
$\vee$-Tuontisääntö:

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee\mathbf{T} \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee\mathbf{T}$$

$\vee$-Eliminointisääntö:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^1 \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \vee\mathbf{E}, 1$$

Merkintä "$\mathbf{E}$, 1" tarkoittaa, että tilapäinen oletus numero 1 voidaan nyt eliminoida.

$\vee$-Tuontisääntö on melko itsestään selvä: jos tiedämme disjunktin, tiedämme myös disjunktion. Sen sijaan $\vee$-eliminointisääntö on hieman mielenkiintoisempi, ja perustuu samaan ajatukseen, kuin todistus tapauksittain. Ideana kuitenkin on, että jos tiedämme $A \vee B$:n ja lisäksi C:n, riippumatta siitä teemmekö väliaikaisen oletuksen A vai B, voimme päätellä C:n.

1.6.12 Disjunktion eliminointi

Voimme johtaa C:n oletuksesta $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. Miettikäämme ensin miksi C seuraa $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$:sta. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ tarkoittaa, että $A \wedge C$ tai $B \wedge C$ (tai molemmat) ovat tosia. Mutta olipa $A \wedge C$ tai $B \wedge C$ tosi, meillä on C joka tapauksessa.

1.6.13 Disjunktion eliminointi (jatkoa)

Tässä on luonnollinen päättely joka erittää C:n johdon $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$:sta.

$$\frac{(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad \dfrac{[A \wedge C]^1}{C}\ \wedge\mathbf{E} \quad \dfrac{[B \wedge C]^1}{C}\ \wedge\mathbf{E}}{C}\ \wedge\mathbf{E}, 1$$

Tässä näkyy yksi iso $\vee$-eliminointisäännön käyttö. Käytämme $\wedge$-eliminointisääntöä tilapäisiin oletuksiimme.

1.6.14 Disjunktion tuonti

Voimme johtaa $(A \vee C) \wedge (B \vee D)$:n oletuksesta $A \wedge B$. Miettikäämme ensin intuitiivisesti miksi $(A \vee C) \wedge (B \vee D)$ seuraisi $A \wedge B$:stä. Jos $A \wedge B$ on tosi, niin molemmat A ja B ovat tosia. A:sta seuraa $A \vee C$ ja B:stä taas $B \vee D$. Joten saamme $(A \vee C) \wedge (B \vee D)$.

1.6.15 Disjunktion tuonti (jatkoa)

Nyt voimme luoda tarvittavat luonnolliset päättelyt $(A \vee C) \wedge (B \vee D)$:n johtamiseen oletuksesta $(A \wedge B)$. Yritämme käyttää $\wedge$-tuontisääntöä. Jotta voimme saada $(A \vee C)$, meidän täytyy käyttää $\wedge$-eliminointisääntöä saadaksemme A:n ja sitten $\vee$-tuontisääntöä saadaksemme $(A \vee C)$. Sama tehdään $B \vee C$:n kanssa.

1.6.16 A:n johtaminen $A \vee A$:sta

Tässä johdamme A:n $A \vee A$:sta. Tämä on jotakuinkin erikoinen tapaus, mutta huomaa, että työskentelemme nyt johtopäätösten kanssa joita tietokonekin voi joutua tekemään. Meille on aivan selvää, että A seuraa $A \lor A$:sta, mutta tietokoneelle se ei ole välttämättä yhtä helppo johtopäätös tehdä. On myös olemassa loogisia systeemejä missä A:ta ei voi johtaa $A \lor A$:sta, kuten riippuvuuslogiikka. Riippuvuuslogiikassa disjunktion $A \lor A$:n toteuttaa “tiimi” X jos ja vain jos X voidaan ilmaista yhdisteenä $Y \cup Z$ siten, että molemmat Y ja Z toteuttavat A:n. Tiimi X saattaa hyvinkin toteuttaa disjunktion $A \lor A$ ilman että se toteuttaa A:n, suunnilleen samoista syistä miksi 5 euroa saattaa olla kahden raitiovaunulipun hinta muttei yhden.

Tässä on päättely millä A johdetaan $A \lor A$:sta:

$$\frac{A \lor A \quad [A]^1 \quad [A]^1}{A}\ \lor\mathbf{E}, 1$$

Huomaa, että A on sekä oletus että johtopäätös päättelyssä

$$A.$$

Tämä on ehkä vähän erikoinen päättely, mutta päättely kuitenkin.

1.6.17 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 64 *Johda $B \land A$ lauseesta $A \land B$.*

Ratkaisu: Johdamme A:n ja B:n propositiolauseesta $A \land B$. Sitten yhdistämme nämä kaksi johtopäätöstä ja johdamme $B \land A$:n.

$$\dfrac{\dfrac{A \land B}{B}\ \land\mathbf{E} \qquad \dfrac{A \land B}{A}\ \land\mathbf{E}}{B \land A}\ \land\mathbf{T}$$

□

Tehtävä 65 *Johda $A \lor B$ lauseesta $A \land B$.*

Ratkaisu: Tämä on helppo. Johdamme A:n lauseesta $A \land B$ ja sitten lauseen $A \lor B$ välittömästi A:sta.

$$\dfrac{\dfrac{A \land B}{A}\ \land\mathbf{E}}{A \lor B}\ \lor\mathbf{T}$$

Huomaa, että toinen aivan yhtä hyvä ratkaisu, joka kulkee B:n kautta, on:

$$\dfrac{\dfrac{A \land B}{B}\ \land\mathbf{E}}{A \lor B}\ \lor\mathbf{T}$$

Päättelyt eivät siis ole yksikäsitteisiä.

□

Tehtävä 66 *Joko juna liikkuu tai sekä vihreä valo palaa että ovi on auki. Johda, että juna liikkuu tai vihreä valo palaa.*

Ratkaisu: Meidän töytyy johtaa $p_0 \lor p_2$ lauseesta $p_0 \lor (p_1 \land p_2)$. Ensin voisi kokeilla käyttää $\lor$-tuontisääntöä mutta siitä huomaa aika nopeasti, että se ei johda mihinkään. Seuraavaksi voisi kokeilla käyttää $\lor$-eliminointisääntöä ja tämä itse asiassa toimii.

Oletuksen nojalla joko p_0 tai $p_1 \land p_2$ pätee. Molemmissa tapauksissa voimme johtaa $p_0 \lor p_2$. Jotta voimme käyttää $\lor$-eliminointisääntöä, valmistaudumme seuraavalla tavalla:

$$\dfrac{p_0 \lor (p_1 \land p_2) \qquad \begin{matrix} \\ p_0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} p_1 \land p_2 \\ \\ \end{matrix}}{p_0 \lor p_2}\ \lor\mathbf{E}$$

Nyt meidän täytyy johtaa $p_0 \lor p_2$. Ensin lauseesta p_0 ja sitten lauseesta $p_1 \land p_2$, mutta molemmat ovat helppoja tehdä:

$$\dfrac{p_0 \lor (p_1 \land p_2) \qquad \dfrac{[p_0]}{p_0 \lor p_2}\ \lor\mathbf{T} \qquad \dfrac{\dfrac{[p_1 \land p_2]}{p_2}\ \land\mathbf{E}}{p_0 \lor p_2}\ \lor\mathbf{T}}{p_0 \lor p_2}\ \lor\mathbf{E}$$

□

Tehtävä 67 *Johda $(A \lor B) \lor C$ lauseesta $A \lor (B \lor C)$.*

Ratkaisu: Oletuksemme on A:n ja $B \lor C$:n disjunktio, joten käytämme $\lor$-eliminointisääntöä. Huomaamme, että A:sta voidaan johtaa $A \lor B$ ja täten myös $(A \lor B) \lor C$. Toisaalta, $B \lor C$:stä myös johtaa $(A \lor B) \lor C$ käyttämällä $\lor$-eliminointisääntöä, joten käytämme todistusta tapauksittain:

$$\dfrac{A \vee (B \vee C) \quad \dfrac{\dfrac{[A]}{A\vee B}\,\vee\mathbf{T}}{(A\vee B)\vee C}\,\vee\mathbf{T} \quad \dfrac{[B\vee C] \quad \dfrac{\dfrac{[B]}{A\vee B}\,\vee\mathbf{T}}{(A\vee B)\vee C}\,\vee\mathbf{T} \quad \dfrac{[C]}{(A\vee B)\vee C}\,\vee\mathbf{T}}{(A\vee B)\vee C}\,\vee\mathbf{E}}{(A\vee B)\vee C}\,\vee\mathbf{T}$$

Kuva 1.5: Lauseen $(A \vee B) \vee C$ johtaminen lauseesta $A \vee (B \vee C)$

Tapaus 1: Olettakaamme B. Siitä seuraa $A \vee B$, ja siitä taas $(A \vee B) \vee C$.

Tapaus 2: Olettakaamme C. Siitä seuraa $(A \vee B) \vee C$. Johtopäätös on valmis. (Katso kuva 1.5.)

□

1.6.18 Tehtävät

Tehtävä 68 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi: $A \wedge (B \vee C)$ lauseesta $A \wedge C$.*

Tehtävä 69 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi: $A \wedge (B \vee C)$ lauseesta $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.*
Vihje: Tilapäisiä oletuksia voidaan käyttää useamman kerran ennen kun ne eliminoidaan.

Tehtävä 70 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi: $A \vee (B \wedge C)$ lauseesta $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.*

Tehtävä 71 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ lauseesta $A \wedge (B \vee C)$.*

Tehtävä 72 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi: $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ lauseesta $A \vee (B \wedge C)$.*

1.7 Luonnollinen päättely: Implikaatio

1.7.1 Implikaation säännöt

Opimme nyt implikaation tuonti- ja eliminointisäännöt.

Nämä ovat seuraavat:

$\to$-Tuontisääntö

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{\vdots}}{\dfrac{B}{A \to B}}\,\to\mathbf{T}, 1$$

$\to$-Eliminointisääntö

$$\dfrac{A \to B \quad A}{B}\,\to\mathbf{E}$$

1.7.2 Implikaation säännöt (jatkoa)

Näiden sääntöjen oppiminen vaatii hieman harjoittelua, mutta katsokaamme niitä nyt hieman tarkemmin. $\to$-Eliminointisääntö käytännössä tarkoittaa seuraavaa: jos olemme johtaneet sekä A:n että $A \to B$:n niin voimme päätellä B:n. Tämä on implikaation idea. Me jopa luemme lauseen $A \to B$ näin "Jos A, niin B". Eli jos tiedämme A:n, niin voimme tosiaan päätellä B:n.

Entäs $\to$-tuontisääntö? Tämä sääntö tarkoittaa käytännössä seuraavaa: jos olettamalla A:n voimme johtaa B:n, niin voimme päätellä $A \to B$:n olettamatta$A$:ta. Tämä sääntö osoittaa tärkeän suhteen johtamisen ja implikaation välillä ja vastaa intuitiota jonka mukaan implikaatio on loogisen seuraamuksen formalisointi.

1.7.3 Implikaation eliminoiminen

Tässä on esimerkki $\to$-eliminointisäännöstä: Johdamme C:n A:sta ja $(A \vee B) \to C$:stä.

Aluksi käytämme $\to$-eliminointisääntöä. Jotta tämä toimisi meidän pitää pystyä johtamaan $A \vee B$ A:sta. Tämä voidaan tehdä käyttämällä $\vee$-tuontisääntöä:

$$\dfrac{(A \vee B) \to C \quad \dfrac{A}{A \vee B}\,\vee\mathbf{T}}{C}\,\to\mathbf{E}$$

1.7.4 Implikaation tuonti

Tässä on esimerkki $\rightarrow$-tuontisäännön käytöstä: Voimme johtaa $A \rightarrow C$:n oletuksista $A \rightarrow B$ ja $B \rightarrow C$. Ensin käytämme $\rightarrow$-tuontisääntöä. Teemme tilapäisen oletuksen A ja yritämme johtaa C. Aikaisempi oletuksemme, $A \rightarrow B$, ja uusi tilapäinen oletuksemme A sallivat meidän johtaa B:n. Oletuksen $B \rightarrow C$ ja B avulla voimme johtaa C:n.

$$\dfrac{\dfrac{B \rightarrow C \qquad \dfrac{A \rightarrow B \quad [A]^1}{B} \rightarrow \mathbf{E}}{C} \rightarrow \mathbf{E}}{A \rightarrow C} \rightarrow \mathbf{T}, 1$$

1.7.5 Esimerkki: $(A \rightarrow A)$:n johtaminen

Tämä on taas jotakuinkin erikoinen tapaus. Ei voi kieltää, että näiden lyhyiden kaavojen todistaminen saattaa vaikuttaa hieman turhalta, mutta on hyvä muistaa, että ne ovat rakennuspalikoita isommille päättelyille.

A on oletus ja johtopäätös seuraavassa päättelyssä:

$$A.$$

Nyt oletus A voidaan eliminoida ja voimme johtaa kaavan $A \rightarrow A$:

$$\dfrac{[A]^1}{A \rightarrow A} \rightarrow \mathbf{T}, 1$$

1.7.6 Ekvivalenssin säännöt

Ekvivalenssin käsitteleminen on vähän kuin käsittelisi kahta implikaatiota samaan aikaan. Ekvivalenssia koskevat säännöt ovat siis:

$\leftrightarrow$-Tuontisääntö

$$\dfrac{\begin{array}{cc} [B]^1 & [A]^1 \\ \vdots & \vdots \\ A & B \end{array}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathbf{T}, 1$$

$\leftrightarrow$-Eliminointisääntö

$$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A} \leftrightarrow \mathbf{E}$$

1.7.7 Ekvivalenssin säännöt (jatkoa)

$\leftrightarrow$-Eliminointisääntö tarkoittaa käytännössä, että jos voimme johtaa sekä A että $A \leftrightarrow B$, niin voimme päätellä B:n. Intuitiivisesti tämän pitäisi olla selvä koska ekvivalenssi tarkoittaa, että A ja B ovat “yhtäpitävät”. $\leftrightarrow$-Tuontisääntö taas tarkoittaa, että jos oletamme A:n ja voimme johtaa B:n, ja jos oletamme B:n ja voimme johtaa A:n, niin silloin voimme päätellä $A \leftrightarrow B$ ilman mitään oletuksia. A ja B merkitään ekvivalenteiksi koska ne voidaan johtaa toisistaan.

1.7.8 Ekvivalenssin eliminointi

Esimerkkinä $\leftrightarrow$-eliminointisäännöstä johdamme C:n A:sta ja $(A \vee B) \leftrightarrow C$:stä. Jotta voimme käyttää $\leftrightarrow$-eliminointisääntöä, meidän pitää jotenkin johtaa $A \vee B$. $A \vee B$ voidaan johtaa olettaen A, mutta tämä on tietenkin suora $\vee$-tuontisäännön sovellutus. Joten:

$$\dfrac{(A \vee B) \leftrightarrow C \qquad \dfrac{A}{A \vee B} \vee \mathbf{T}}{C} \leftrightarrow \mathbf{E}$$

1.7.9 Ekvivalenssin tuonti

Esimerkkinä $\leftrightarrow$-tuontissäännöstä voimme johtaa $A \leftrightarrow C$:n oletuksista $A \leftrightarrow B$ ja $B \leftrightarrow C$. Ensin teemme tilapäisen oletuksen C ja yritämme johtaa A:n ja sitten teemme tilapäisen oletuksen A, jotta voimme johtaa C:n. Täten käytämme oletettuja ekvivalensseja $A \leftrightarrow B$ ja $B \leftrightarrow C$. Kun käyttää $\leftrightarrow$-eliminointisääntöä suhteessa näihin ekvivalensseihin, voimme johtaa ekvivalenssin $A \leftrightarrow C$:n.

$$\dfrac{\dfrac{B \leftrightarrow C \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \quad [A]^1}{B} \leftrightarrow \mathbf{E}}{C} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad \dfrac{B \leftrightarrow C \quad [C]^1}{B} \leftrightarrow \mathbf{E}}{A} \leftrightarrow \mathbf{E}}{A \leftrightarrow C} \leftrightarrow \mathbf{T}, 1$$

1.7.10 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 73 *Johda* $(A \wedge B) \rightarrow C$ *lauseesta* $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Ratkaisu: Oletamme $A \wedge B$. Joten saamme A:n ja B:n. Lauseista A ja $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ saamme lauseen $B \rightarrow C$. Lauseista B ja $B \rightarrow C$ saamme lauseen C. Olemme valmiita, voimme nyt vetää johtopäätöksemme.

Valmistaudumme käyttämään $\rightarrow$-tuontisääntöä. Haluamme johtaa implikaation ja meillä on konjunktio väliaikaisena oletuksena. Käytämme $\wedge$-eliminointisääntöä kahdesti jotta saamme A:n ja B:n. Sitten käytämme oletustamme jotta saamme lauseen $B \rightarrow C$ ja sitten C:n. Nyt $\rightarrow$-tuontisääntö valmistelee lunnollisen päättelymme.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge B]^1}{A}\wedge\mathbf{E} \qquad A\rightarrow(B\rightarrow C)}{B\rightarrow C}\rightarrow\mathbf{E} \qquad \dfrac{[A\wedge B]^1}{B}\wedge\mathbf{E}}{C}\rightarrow\mathbf{E}}{(A\wedge B)\rightarrow C}\rightarrow\mathbf{T},1$$

□

Tehtävä 74 *Johda* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Ratkaisu: Valmistaudumme käyttämään $\rightarrow$-tuontisääntöä. Jotta voimme käyttää sitä teemme väliaikaisen oletuksen A.

Nyt käytämme $\rightarrow$-tuontisääntöä ja päättelemme lauseen $B \rightarrow A$ ja samalla eliminoimme väliaikaisen oletuksen B. Oops! Me emme ole tehneet väliaikaista oletusta B miten voimme siis eliminoida sen? Ei mitään huolta. Ei ole mitään tarvetta eliminoida B:tä koska väliaikaista oletusta B ei ole koskaan tehty. Johdimme lauseen $B \rightarrow A$ väliaikaisesta oletuksesta A.

$$\dfrac{A}{B\rightarrow A}\rightarrow\mathbf{T}$$

Voimme johtaa $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ käyttämällä $\rightarrow$-tuontisääntöä uudestaan, ja samalla voimme elminoida väliaikaisen oletuksen A. Päättely on nyt valmis:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{B\rightarrow A}\rightarrow\mathbf{T}}{A\rightarrow(B\rightarrow A)}\rightarrow\mathbf{T},1$$

□

Tehtävä 75 *Johda* $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ *lauseesta* $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Ratkaisu: Oletamme lauseen $A \rightarrow B$. Johtaaksemme $A \rightarrow C$ seuraavaksi oletamme A:n ja yritämme johtaa C:n. Lauseista A ja $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ voimme johtaa lauseen $B \rightarrow C$. Lauseesta $A \rightarrow B$ saamme myös johdettua B:n. Joten lauseesta $B \rightarrow C$ saaamme vihdoin johdettua C:n. Nyt voimme käyttää $\rightarrow$-tuontisääntöä ja johtaa lauseen $A \rightarrow C$ ja samalla voimme eliminoida väliaikaisen oletuksen A kahdesta paikasta. Kun käytämme $\rightarrow$-tuontisääntöä uudestaan saamme halutun lauseen $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ johdettua ja väliaikaisen oletuksen $A \rightarrow B$ eliminoitua. Täyden päättelyn löytää Kuvasta 1.6

□

1.7.11 Tehtävät

Tehtävä 76 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi:* $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ *lauseesta* $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Tehtävä 77 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi:* $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D)$ *lauseesta* $(B \wedge A) \rightarrow (D \wedge C)$.

Tehtävä 78 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi:* $A \rightarrow (C \vee B)$ *lauseesta* $A \rightarrow (B \vee C)$.

Tehtävä 79 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi:* $A \rightarrow (B \vee C)$ *lauseesta* $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$.

Tehtävä 80 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi:* $A \rightarrow B$ *lauseista* $(A \wedge C) \leftrightarrow B$ *ja* C.

Tehtävä 81 *Käytä luonnollista päättelyä johtaaksesi:* $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$.

1.8 Luonnollinen päättely: Negaatio

Päättelymenetelmät jotka olemme oppineet tähän mennessä ovat olleet ns. suoria päätelmiä. Eli päätelmiä joissa aloitetaan oletuksista ja johdetaan askel kerrallaan haluttu johtopäätös. Olemme myös oppineet todistuksen tapauksittain eli disjunktion eliminointisäännön, tai $\vee$-eliminointisäännön. Nyt opimme todistamaan negatiivisia lauseita.

1.8.1 Ristiriidan todistaminen

Perusideana $\neg A$:n todistamisessa on ristiriidan johtaminen A:sta. Toisin sanoen hetkellisesti oletamme A:n, ja johdamme $B \wedge \neg B$:n jollekin B:n kaavalle. Periaatteessa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad [A \to B]}{B}\,{\to}\mathbf{E} \qquad \dfrac{[A] \quad A \to (B \to C)}{B \to C}\,{\to}\mathbf{E}}{C}\,{\to}\mathbf{E}}{A \to C}\,{\to}\mathbf{T}}{(A \to B) \to (A \to C)}\,{\to}\mathbf{T}$$

Kuva 1.6: Lauseen $(A \to B) \to (A \to C)$ johtaminen lauseesta $A \to (B \to C)$

B voi olla sama kuin A, mutta on todennäköisempää että se on jokin muu.

Kun olemme johtaneet vastaväitteen $B \wedge \neg B$:n tilapäisestä oletuksesta A, niin olemme todistaneet $\neg A$:n olevan totta. Samanaikaisesti voimme eliminoida oletuksen A.

Yrittäkäämme ymmärtää negaation todistamista. Pohjalla on yksinkertaisesti seuraava idea: Oletetaan, että kävelen taloon sisään ja väitän että ulkona *ei* sada. Joku saattaa kiistää ja vaatia todistusta. Voin pohdiskella, että jos ulkona sataisi, takkini olisi märkä, mutta takkini ei ole märkä, joten ei sada. Täten hyväksymme lauseen "ulkona sataa" negaation koska lause "ulkona sataa" olisi vastoin sitä mitä näemme omilla silmillämme.

Mietitään toista esimerkkiä: miksi on helppo hyväksyä lauseen "maapallo on litteä" negaatio. Jos maapallo olisi litteä, niin maapallon varjo kuussa ei olisi pyöreä, ainakaan aina, mutta jokainen joka on nähnyt kuun tietää, että maapallon varjo on aina pyöreä. Myös jos maapallo olisi litteä niin lentäjät ja merimiehet näkisivät maailman reunan, mutta mitä he todella näkevät on horisontin joka on kaareva ja aina yhtä kaukana. Joten oletus että maapallo on litteä olisi empiirisen todistusaineiston vastainen, joten on hyvin helppoa hyväksyä lauseen "maapallo on litteä" negaatio todeksi.

Näiden kahden esimerkin ideana oli näyttää että arkikielessä hyväksymme lauseiden negaatioita jos lause itsekseen johtaisi järjettömyyteen. Tämä on myös syy siihen, että luonnollisessa päättelyssä todistamme $\neg A$:n olettamalla A:n ja johtamalla siitä ristiriidan.

1.8.2 Harjoittelua

Harjoitelkaamme nyt ristiriidan johtamista. Voimme johtaa ristiriidan lauseesta $(A \to B) \wedge A \wedge \neg B$. Intuitiivisesti meillä on ristiriita, koska lause $A \to B$ johtaa ristiriitaan, sillä A:sta saamme B:n, ja toisaalta oletamme $\neg B$:n. Joten luonnollisessa päättelyssä johdamme oletuksistamme ensin lauseen $A \to B$ käyttäen $\wedge$-eliminointisääntöä. Sitten johdamme oletuksistamme myös A:n käyttäen $\wedge$-eliminointisääntöä. Sitten käytämme $\to$-eliminointisääntöä lauseeseen $A \to B$ johtaaksemme B:n, ja lopulta saamme oletuksestamme $\neg B$:n käyttäen $\wedge$-eliminointisääntöä. Lopuksi $\wedge$-tuontisäännön käyttäminen päättää ristiriidan $B \wedge \neg B$:n johtamisen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \to B) \wedge A \wedge \neg B}{A \to B}\,\wedge\mathbf{E} \quad \dfrac{(A \to B) \wedge A \wedge \neg B}{A}\,\wedge\mathbf{E}}{B}\,{\to}\mathbf{E} \quad \dfrac{(A \to B) \wedge A \wedge \neg B}{\neg B}\,\wedge\mathbf{E}}{B \wedge \neg B}\,\wedge\mathbf{T}$$

1.8.3 Negaation tuonti

Negaation tuontisääntö on seuraava:

$\neg$-Tuontisääntö:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\,\neg\mathbf{T}, 1$$

Yllä opimme, miten voimme johtaa ristiriidan lauseesta $(A \to B) \wedge A \wedge \neg B$. Käyttämällä $\neg$-tuontisääntöä voimme johtaa $\neg((A \to B) \wedge A \wedge \neg B)$ ilman mitään oletuksia. Tilapäisesti oletamme lauseen $(A \to B) \wedge A \wedge \neg B$, toistamme $B \wedge \neg B$:n johdon oletuksestamme ja käytämme $\neg$-tuontisääntöa johtaaksemme oletuksemme negaation. Samanaikaisesti tilapäiset oletukset eliminoidaan kolmesta paikasta.

1.8.4 $\neg\neg A$:n johtaminen A:sta

Katsokaamme nyt miten $\neg\neg A$:n johdetaan A:sta. Tämä on hieman hankala, koska johtaminen käy hyvin nopeasti ja lyhyesti, joten saattaa olla hieman hankalaa ymmärtää mitä tapahtuu. Tästä huolimatta karkea idea on seuraavanlainen: Oletamme A:n ja haluamme näyttää että $\neg A$ johtaa vastaväitteeseen. Totta kai $\neg A$ on A:n kanssa ristiriidassa, negaatio $\neg$ tarkoittaa juuri tätä. Joten kirjoittakaamme luonnollinen päättely. Teemme nyt tilapäisen oletuksen $\neg A$ ja saamme heti lauseen $A \wedge \neg A$ käyttämällä $\wedge$-tuontisääntöä. Eli olemme nyt johtaneet ristiriidan ja voimme käyttää $\neg$-tuontisääntöä johtaaksemme $\neg\neg A$:n, samalla poistamalla tilapäisen oletuksemme. Olemme valmiita:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad [\neg A]^1}{A \wedge \neg A}\ \wedge\mathbf{T}}{\neg\neg A}\ \neg\mathbf{E}, 1$$

1.8.5 Epäsuoria päätelyjä

Vaikeimmat päätelyt joita joutuu tekemään, ovat yleensä epäsuoria. Näitä päätelyjä kutsutaan epäsuoriksi sen takia, että ne nojaavat tilapäisiin oletuksiin, jotka joskus vedetään ikään kuin tyhjästä. Tyypillisessä epäsuorassa päätelyssä, ns. *reduction ad absudrum*, haluamme todistaa A:n ja aloitamme tekemällä tilapäisen oletuksen $\neg A$. Jos voimme nyt johtaa ristiriidan, niin intuitiivisesti tiedämme että A:n on oltava tosi koska $\neg A$ johtaa ristiriitaan. Tarkkaan ottaen, johdamme $\neg\neg A$:n käyttäen $\neg$-tuontisääntöä ja sitten annamme kahden negaation kumota toisensa. Jotta tämä toimisi, tarvitsemme uuden säännön, $\neg$-eliminointisäännön:
$\neg$-eliminointisääntö:

$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\mathbf{E}$$

Katsokaamme $\neg$-eliminointisäännön perusteluja. Kun oletamme $\neg\neg A$:n niin oletamme että $\neg A$ ei ole tosi, jolloin A:n on pakko olla tosi, koska joko A tai $\neg A$ on tosi. Tätä ajattelutapaa kutsutaan usein *klassiseksi logiikaksi*, koska on olemassa myös *ei-klassinen logiikka*. Eiklassisessa on logiikassa on monia eri lajeja, mutta niissä kaikissa on ainakin yksi sama piirre: ei oleteta, että on vain kaksi totuusarvoa. Kuuluisa esimerkki Aristoteleta on lause “Huomenna on meritaistelu”. Kutsutaan tätä lauseeksi A. Millä perusteella voisimme sanoa, että A on tosi. Monia asioita voi tapahtua jotka hyvin helposti tekisivät meritaistelusta mahdottoman tai tarpeettoman. Mutta tarkoittaako tämä, että meidän pitäisi hyväksyä $\neg A$ totena? Tämäkin vaikuttaa aivan yhtä perusteettomalta päättelyltä koska emme tiedä mitä huomenna tapahtuu. Joten olisi loogista sanoa ettei kumpikaan A tai $\neg A$ ole (vielä) totta. Lause A on esimerkki *temporaalilogiikasta*.

Olemme nyt esitelleet kaksi sääntöä jotka koskevat negaation avulla päättelemistä:

$\neg$-Tuontisääntö

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^1\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathbf{T}, 1$$

$\neg$-Eliminointisääntö

$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\mathbf{E}$$

1.8.6 $A \to B$:n johtaminen $\neg A$:sta

Jotta voimme todistaa $A \to B$, oletamme A:n. A:sta ja oletuksesta $\neg A$ saamme $A \wedge \neg A$, eli ristiriidan. Negaatiotuontisäännöllä voimme johtaa $\neg\neg B$:n. Voisimme poistaa oletuksen $\neg B$ jos meillä olisi tämä tilapäinen oletus, mutta meillä ei ole. Negaatio-eliminointisäännön kautta saamme B:n. Nyt saamme lopullisen päättelyn käyttämällä $\to$-tuontisääntöä.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad \neg A}{A \wedge \neg A}\ \wedge\mathbf{T}}{\neg\neg B}\ \neg\mathbf{T}}{B}\ \neg\mathbf{E}}{A \to B}\ \to\mathbf{T}$$

1.8.7 A:n johtaminen $\neg(A \to B)$:sta

Tämä on tyypillinen epäsuora todistus. Meidän pitää todistaa A, joten teemme hetkellisen oletuksen $\neg A$. Tavallaan, kokeilemme miten A:n vastakohta, nimittäin $\neg A$, toimisi tilanteessamme. Joten oletamme $\neg A$:n. Kuten ylhäällä, voimme johtaa $A \to B$:n. $\neg(A \to B)$:stä saamme $\neg(A \to B) \wedge (A \to B)$. Joten oletus $\neg A$ on johtanut ristiriitaan. Käyttäen negaatio-tuontisääntöä, saamme $\neg\neg A$:n ja samalla eliminoimme tilapäisen oletuksen $\neg A$:n. Käyttäen negaatio-eliminointia saamme A:n.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \to B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [\neg A]^2}{A \wedge \neg A}\wedge\mathbf{T}}{\neg\neg B}\neg\mathbf{T}}{B}\neg\mathbf{E}}{A \to B}\to\mathbf{T}, 1}{\neg(A \to B) \wedge (A \to B)}\wedge\mathbf{T}}{\neg\neg A}\neg\mathbf{T}, 2}{A}\neg\mathbf{E}$$

1.8.8 $B \wedge \neg B$:n johtaminen $A \wedge \neg A$:sta

Tämä näyttää hieman oudolta, mutta se paljastaa, että ei ole väliä mikä A on ristiriitaisessa kaavassa $A \wedge \neg A$.

Ristiriidasta $A \wedge \neg A$ voimme johtaa $\neg\neg B$:n ja tietenkin myös B:n. Huomaa, että meidän täytyy johtaa B tuplanegaation kautta koska meillä ei ole sääntöä joka antaisi meidän johtaa B suoraan ristiriidasta. Samaan tapaan voimme johtaa $\neg B$:n lauseesta $A \wedge \neg A$. Tällä kertaa meidän ei tarvitse johtaa tuplanegaation kautta. Lopulta yhdistämme B:n ja $\neg B$:n ja olemme valmiita.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge \neg A}{\neg\neg B}\neg\mathbf{T}}{B}\neg\mathbf{E} \qquad \dfrac{A \wedge \neg A}{\neg B}\neg\mathbf{T}}{B \wedge \neg B}\wedge\mathbf{T}$$

1.8.9 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 82 *Näytä miten lause $\neg A \wedge \neg B$ voidaan johtaa lauseesta $\neg(A \vee B)$. (Tämä on yksi ns. De Morganin laeista.)*

Ratkaisu: Miettikäämme ensin intuitiivisesti miksi propositiolauseen $\neg A \wedge \neg B$ pitäisi seurata propositiolauseesta $\neg(A \vee B)$. Olettakaamme, että ei ole totta että sataa vettä tai lunta. Miksi voimme johtaa, että ei sada vettä eikä lunta? Koska jos sataa, niin se olisi sitäkin suuremmallakin syyllä vettä tai lunta, joten olisimme ristiriidassa oletuksemme kanssa. Yrittäkäämme ilmaista tämä muodollisesti.

Jatkakaamme tätä intuitiivistä ajattelua. Koska käsittelemme konjunktiota, voimme miettiä jokaista konjunktia erikseen. Miettikäämme $\neg A$:ta. Jos oletamme A:n niin voimme johtaa $A \vee B$, joka on välittömästi ristiriidassa oletuksemme $\neg(A \vee B)$ kanssa. Joten meidän täytyy päätyä $\neg A$:han. Samalla tavalla voimme johtaa $\neg B$:n.

Joten aloitamme oletuksella $\neg(A \vee B)$ ja tilapäisellä oletuksella A jotta voimme johtaa ristiriidan ja täten tilapäisen oletuksen $\neg A$:n.

Saamme ristiriidan välittömästi käyttämällä $\vee$-tuontisääntöä ja sitten $\wedge$-tuontisääntöä.

Käyttämällä $\neg$-tuontisääntöä saamme johdettua $\neg A$:n ja eliminoitua tilapäisen oletuksen A.

Teemme saman B:llä jotta saamme $\neg B$:n.

Käyttämällä $\wedge$-tuontisääntöä valmistelemme todistuksen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee B) \qquad \dfrac{[A]^1}{A \vee B}\vee\mathbf{T}}{\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)}\wedge\mathbf{T}}{\neg A}\neg\mathbf{T}, 1 \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ \neg B\end{matrix}}{\neg A \wedge \neg B}\wedge\mathbf{T}$$

□

Tehtävä 83 *Näytä miten lause $\neg A \vee \neg B$ voidaan johtaa lauseesta $\neg(A \wedge B)$. (Tämä on toinen ns. De Morganin laeista.)*

Ratkaisu: Tämä on hieman vaikeampaa! Haluamme päätyä tilanteeseen jossa olemme johtaneet lauseen $\neg A \vee \neg B$, joten houkutus on yrittää aloittaa johtamalla joko $\neg A$ tai $\neg B$, mutta kumpi?? Tällainen ongelma logiikassa—ongelma jossa pitää johtaa disjunktio ilman, että on mitään selvää tapaa johtaa kumpikaan disjunkti erikseen—on yksi ero klassisen ja ei-klassisen logiikan välillä. Tässä kurssissa käsitteleme klassista logiikkaa, joten käytämme epäsuoraa päättelyä.

Miettikäämme ensin intuitiivisesti miksi propositiolauseen $\neg A \vee \neg B$ pitäisi seurata propositiolauseesta $\neg(A \wedge B)$. Esimerkiksi olettakaamme, että jossain ruoka-annoksessa ei ole sekä lihaa että kermaa. Miksi voimme johtaa, että joko siitä puuttuu liha tai kerma? Koska, jos siinä olisi lihaa ja kermaa, niin olisimme ristiriidassa oletuksemme kanssa, joten joko lihan tai kerman on pakko puuttua annoksesta. Yrittäkäämme ilmaista tämä muodollisesti.

Miettikäämme uudelleen intuitiivisesti miksi propositiolauseen $\neg A \vee \neg B$ pitäisi seurata propositiolauseesta $\neg(A \wedge B)$. Olettakaamme, että $\neg A \vee \neg B$ ei ole tosi eli, että $\neg(\neg A \vee \neg B)$ on tosi ja yrittäkäämme johtaa ristiriita. Ilmeisesti $\neg A$ johtaa ristiriitaan, joten $\neg\neg A$, eli A. Samalla tavalla saamme B:n. Joten saamme johdettua lauseen

$A \wedge B$, mutta tämä lausen on ristiriidassa olettaneemme lauseen $\neg(A \wedge B)$ kanssa. Joten saamme johdettua $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ eli lauseen $\neg A \vee \neg B$.

Luonnollisen päättelyn löydät kuvasta 1.7.

Aloitamme kirjoittamalla todistettavan lauseen oletuksen $\neg(A \wedge B)$ ja negaation $\neg(\neg A \vee \neg B)$. Koska olemme johtaneet väitteemme negaation, käytämme epäsuoraa päättelyä ja yritämme johtaa ristiriidan.

Huomaamme, että jos $\neg A$ on väliaikainen oletus, niin voimme johtaa lauseen $\neg A \vee \neg B$, mikä on ristiriidassa olettaneemme lauseen $\neg(\neg A \vee \neg B)$ kanssa. Joten, käyttäen tupla negaatio temppua voimme päätyä johtopäätökseen A ja eliminoida väliaikaisen oletuksen $\neg A$.

Voimme tehdä saman B:lle.

Lopulta voimme johtaa, että lause $A \wedge B$ johtaa ristiriitaan.

päättely on valmis (katso Kuva 1.7).

□

Tehtävä 84 *Propositiolause $A \vee \neg A$ on johdettavissa. Näytä miten. (Tämä on ns. kolmannen poissuljetun laki.)*

Ratkaisu: Intuitio: käytämme epäsuoraa todistusta. Joten oletamme lauseen $\neg(A \vee \neg A)$ ja johdamme siitä ristiriidan. A:sta seuraa $A \vee \neg A$ ja täten ristiriita. Joten voimme päätellä $\neg A$:n. Mutta tästä taas seuraa $A \vee \neg A$ joka on ristiriita, ja olemme valmiita.

Luonnollisen päättelyn löydät kuvasta 1.8.

Aloitamme kirjoittamalla väliaikaisen oletuksen, nimellisesti johdettavan lauseen negaation, eli $\neg(A \vee \neg A)$. Tästä eteenpäin yritämme johtaa ristiriidan jotta voimme käyttää $\neg$-tuontisääntöä ja $\neg$-eliminointisääntöä ja sen avulla johtaa lause $A \vee \neg A$.

Nyt teemme uuden väliaikaisen oletuksen A. Tästä saamme johdettua välittömästi lauseen $A \vee \neg A$, ensimmäinen väliaikaisen oletuksemme vastaisesti. Joten, oletamme $\neg A$:n ja eliminoimme väliaikaisen oletuksen A.

Mutta $\neg A$:sta voimme johtaa propositiolauseen $A \vee \neg A$, joka on ristiriidassa ensinmäisen—ja viimeisen—väliaikaisen oletuksemme kanssa.

Joten nyt voimme käyttää $\neg$-tuontisääntöä johtaaksemme ainoan väliaikaisen oletuksemme negaation $\neg\neg(A \vee \neg A)$, joka on nyt muuten eliminoitu. Joten saamme $A \vee \neg A$ ja meillä ei ole yhtään väliaikaista oletusta jäljellä, joten olemme valmiita (katso kuvaa 1.8)

□

1.8.10 Tehtävät

Tehtävä 85 *Johda lause $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.*

Tehtävä 86 *Johda lause $\neg A \vee B$ lauseesta $\neg\neg B \vee \neg A$.*

Tehtävä 87 *Johda lause $\neg(A \wedge B)$ lauseesta $\neg A \vee \neg B$.*

Tehtävä 88 *Johda lause $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.*

Tehtävä 89 *Johda lause $A \wedge B$ lauseista $A \wedge (B \vee C)$ ja $\neg C$.*

Tehtävä 90 *Johda lause $\neg((A \vee B) \wedge \neg A \wedge \neg B)$.*

Tehtävä 91 *Johda lause $\neg(A \vee B)$ lauseesta $\neg A \wedge \neg B$.*

Tehtävä 92 *Johda lause $\neg A \vee B$ lauseesta $\neg(A \wedge \neg B)$.*

Tehtävä 93 *Johda lause $A \wedge \neg B$ lauseesta $\neg(\neg A \vee B)$.*

Tehtävä 94 *Johda lause $(A \to B) \vee (B \to A)$.*

1.9 Luonnollinen päättely – Kertaus

Voimme nyt koota kaikki tuonti- ja eliminointisäännöt taulukkoon, katso Kuva 1.9.

1.10 Eheys

Päättelyn eheys tarkoittaa, että jos hyväksymme joidenkin kaavojen tai lauseiden olevan tosia ja johdamme niistä uuden lauseen tai kaavan, niin tämänkin on oltava totta. Logiikka perustuu tähän ideaan.

Tarkemmin sanottuna, luonnollisen päättelyn eheys tarkoittaa seuraavaa: Jos kaava A voidaan johtaa oletuksista $B_1, ..., B_n$ ja $v(B_1) = ... = v(B_n) = 1$ jossakin totuusjakaumassa v, niin silloin myös $v(A) = 1$.

Lause 1.7 *Olettakaamme, että v on totuusjakauma. Jos A on päätelty luonnollisella päättelyllä $B_1, ..., B_n$:stä ja $v(B_1) = ... = v(B_n) = 1$, niin silloin $v(A) = 1$.*

Proof: Todistus on "induktiivinen" ja perustuu luonnollisen päättelyn rakenteeseen. Näytämme että jokainen päättely on eheä siinä mielessä, että jos jossakin totuusjakaumassa päättelyn oletuksilla on totuusarvo 1, niin myös

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \lor \neg B)] \quad \dfrac{[\neg A]}{\neg A \lor \neg B}\,{\lor}\,\mathbf{T}}{(\neg A \lor \neg B) \land \neg(\neg A \lor \neg B)))}\,{\land}\,\mathbf{T}}{\neg\neg A}\,\neg\,\mathbf{T}}{A}\,\neg\,\mathbf{E} \quad \begin{array}{c}\neg B\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \land B}\,{\land}\,\mathbf{T} \quad \neg(A \land B)}{(A \land B) \land \neg(A \land B)}\,{\land}\,\mathbf{T}}{\neg\neg(\neg A \lor \neg B)}\,\neg\,\mathbf{T}}{\neg A \lor \neg B}\,\neg\,\mathbf{E}$$

Kuva 1.7: Lauseen $\neg A \lor \neg B$ johto lauseesta $\neg(A \land B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \lor \neg A)] \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \lor \neg A))] \quad \dfrac{[A]}{A \lor \neg A}\,{\lor}\,\mathbf{T}}{\neg(A \lor \neg A) \land (A \lor \neg A)}\,{\land}\,\mathbf{T}}{\neg A}\,\neg\,\mathbf{T}}{A \lor \neg A}\,{\lor}\,\mathbf{T}}{\neg(A \lor \neg A) \land (A \lor \neg A)}\,{\land}\,\mathbf{T}}{\neg\neg(A \lor \neg A)}\,\neg\,\mathbf{T}}{A \lor \neg A}\,\neg\,\mathbf{E}$$

Kuva 1.8: Lauseen $A \lor \neg A$ johto.

Konnektiivi	Tuontisääntö	Eliminointisääntö
Konjunktio	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathbf{T}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathbf{E}$
Disjunktio	$\dfrac{A}{A \vee B}\ \vee\mathbf{T} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\ \vee\mathbf{T}$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \vee\mathbf{E}$
Implikaatio	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ \to\mathbf{T}$	$\dfrac{A \to B \quad A}{B}\ \to\mathbf{E}$
Ekvivalenssi	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}\ \leftrightarrow\mathbf{T}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$
Negaatio	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathbf{T}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\mathbf{E}$

Kuva 1.9: Luonnollisen päättelyn säännöt.

johtopäätöksellä on totuusarvo 1. Aloitamme suhteellisen lyhyistä päättelyistä ja jatkamme siitä pidempiin päättelyihin. Lyhyin päättely koostuu vain yhdestä lauseesta A, joka on päättelyn oletus ja johtopäätös. Tietenkin tämä päättely on eheä.

Seuraavaksi tarkastelemme päättelyjä missä joitain sääntöjä on todellakin käytetty. Jokaisessa päättelyssä on yksikäsitteinen johtopäätös ja jokin "viimeinen sääntö" jota on käytetty tämän johtopäätöksen johtamiseen. Kaikki päättelyt ennen viimeistä sääntöä olivat lyhyempiä. Koska oletamme, että lyhyemmät päättelyt ovat eheitä, kun sovellamme viimeistä sääntöä, voimme olettaa, että kaikki edelliset päättelyt ovat eheitä.

Eli, jos oletamme että totuusjakauma v antaa totuusarvon 1 jonkin suuren päättelyn oletuksille, tämä totuusarvo tavallaan "virtaa" sääntöjä pitkin kunnes se saapuu johtopäätökseen, ja silloin tällä johtopäätökselläkin on totuusarvo 1.

1. Konjunktion tuontisääntö

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathbf{T}$$

Oletamme, että $v(A) = v(B) = 1$. Näytämme, että $v(A \wedge B) = 1$. Mutta tämä on triviaalia! Melkein kaikki tapaukset tästä todistuksesta ovat triviaaleja, koska päättelysääntö ja totuuden määritelmä perustuvat samaan ideaan.

2. Konjunktion eliminointisääntö

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathbf{E} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathbf{E}$$

Oletamme, että $v(A \wedge B) = 1$. Näytämme, että $v(A) = v(B) = 1$. Mutta tämäkin on triviaalia!

3. Disjunktion tuontisääntö

$$\frac{A}{A \vee B} \vee \mathbf{T} \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee \mathbf{T}$$

Oletamme, että $v(A) = 1$. Näytämme, että $v(A \vee B) = 1$. Mutta tämä on triviaalia!

Toisessa tapauksessa, oletamme, että $v(B) = 1$. Tällöin näytämme, että $v(A \vee B) = 1$. Taas triviaalia!

4. Disjunktion eliminointisääntö

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \vee \mathbf{E}$$

Oletamme $v(A \vee B) = 1$. Oletamme myös, että C:n johto A:sta ja B:stä ovat eheitä, eli toisin sanoen: jos $v(A) = 1$, niin $v(C) = 1$, ja jos $v(B) = 1$, niin $v(C) = 1$. Näytämme $v(C) = 1$. Mutta $v(A \vee B) = 1$ implikoi $v(A) = 1$ tai $v(B) = 1$. Siis kummassakin tapauksessa $v(C) = 1$. Joten $v(C) = 1$.

5. Implikaation tuontisääntö

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B} \to \mathbf{T}$$

Oletamme, että A:n johto B:stä on eheä, eli toisin sanoen, että jos $v(A) = 1$, niin $v(B) = 1$. Todistamme, että $v(A \to B) = 1$. Tapaus 1: $v(A) = 0$. Selvä. Tapaus 2: $v(A) = 1$. Olemme olettaneet, että tässä tapauksessa $v(B) = 1$, eli

$$v(A \to B) = 1.$$

6. Implikaation eliminointisääntö

$$\frac{A \to B \quad A}{B} \to \mathbf{E}$$

Oletamme, että $v(A \to B) = v(A) = 1$. Näytämme, että $v(B) = 1$. Tämä myös on triviaalia!

7. Ekvivalenssin tuontisääntö

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ A\end{array}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathbf{T}$$

Jätämme väitteen muotoilun ja todistuksen laatimisen, harjoitustehtäväksi.

8. Ekvivalenssin eliminointisääntö

$$\frac{A \leftrightarrow B \quad A}{B} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \frac{A \leftrightarrow B \quad B}{A} \leftrightarrow \mathbf{E}$$

Jätämme väitteen muotoilun ja todistuksen laatimisen, harjoitustehtäväksi.

9. Negaation tuontisääntö

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A} \neg \mathbf{T}$$

Oletamme, että $B \wedge \neg B$:n johto A:sta on eheä, eli jos $v(A) = 1$ niin $v(B \wedge \neg B) = 1$. Mutta $v(B \wedge \neg B) = 0$, aina. Joten $v(A) = 0$. Joten $v(\neg A) = 1$.

10. Negaation eliminointisääntö

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg \mathbf{E}$$

Oletamme, että $v(\neg\neg A) = 1$. Näytämme, että $v(A) = 1$.Selvä!

□

1.10.1 Eheyslause

Propositiologiikan **eheyslause** tarkoittaa, että jos propositiolauseella on luonnollinen päättely, niin se on tautologia. Yleisemmin, jos propositiolauseella A on luonnollinen päättely oletuksista, joilla on totuusarvo 1 totuusjakaumassa v, niin myös A:lla on totuusarvo 1, eli $v(A) = 1$.

Olemme juuri todistaneet tämän yksinkertaisen faktan. On merkittävää, että myös käänteinen pitää paikkansa: jos propositiolause on tautologia, niin sillä on luonnollinen päättely. Eli kaikilla tautologioilla on luonnollinen päättely, ja kaikki lauseet joilla on luonnollinen päättely ovat tautologioita. Tätä kutsutaan propositiologiikan **täydellisyyslauseeksi**. Sen todistus ei ole kovin monimutkainen, mutta sivutamme sen.

1.10.2 Eheyden soveltaminen

Voimme näyttää, että kaava B ei ole johdettavissa kaavasta A etsimällä totuusjakauman, jossa $v(A) = 1$ ja $v(B) = 0$. Esimerkiksi, voimme näyttää, että $p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)$ ei ole johdettavissa $(p_0 \vee p_2) \to p_1$:stä antamalla $v(p_0) = v(p_1) = v(p_2) = 0$. Tällöin $v((p_0 \vee p_2) \to p_1) = 1$, mutta $v(p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)) = 0$. On tärkeää pystyä johtamaan uusia kaavoja, mutta on yhtä tärkeää pystyä sanomaan, miksi joissain tilanteissa päättely ei ole mahdollista.

1.10.3 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 95 *Näytä, että seuraava päättely ei päde:*

- *Olettakaamme, että $x > 10$ tai $y > 10$.*
- *Olettakaamme myös, että ei sekä $x > 10$ että $y > 10$.*
- *Silloin, jos $x > 10$ ei ole tosi, niin ei ole myöskään $y > 10$.*

Ratkaisu: Antakaamme p_0:n tarkoittaa lausetta “$x > 10$” ja p_1:n tarkoittaa lausetta “$y > 10$”. Oletukset ovat $p_0 \vee p_1$ ja $\neg(p_0 \wedge p_1)$. Johtopäätös on $\neg p_0 \to \neg p_1$.

Ongelmana on osoittaa, että ei ole mitään luonnollista päättelyä joka johtaisi lauseen $\neg p_0 \to \neg p_1$ lauseista $p_0 \vee p_1$ ja $\neg(p_0 \wedge p_1)$.

Väite seuraa eheyslauseesta seuraavanlaisesti: Jos annamme $v(p_0) = 0$ ja $v(p_1) = 1$, niin silloin $v(p_0 \vee p_1) = 1$ ja $v(\neg(p_0 \wedge p_1)) = 1$, mutta $v(\neg p_0 \to \neg p_1) = 0$. Joten ei voi olla luonnollista päättelyä jolla voitaisiin johtaa lause $\neg p_0 \to \neg p_1$ lauseista $p_0 \vee p_1$ ja $\neg(p_0 \wedge p_1)$.

Huomaa, että totuusjakauman v löytämiseen voi käyttää totuustaulua. □

Tehtävä 96 *Näytä, että lausetta $p_0 \wedge \neg p_1$ ei voida johtaa käyttäen luonnollista päättelyä lauseesta $\neg(p_0 \vee p_1)$.*

Ratkaisu: Jos $v(p_0) = v(p_1) = 0$, niin silloin $v(\neg(p_0 \vee p_1)) = 1$, mutta $v(p_0 \wedge \neg p_1) = 0$. Joten eheyslauseen nojalla lause $p_0 \wedge \neg p_1$ ei ole johdettavissa luonnollista päättelyä käyttäen lauseesta $\neg(p_0 \vee p_1)$. □

Tehtävä 97 *Näytä, että seuraava päättely ei päde:*

- *Juna liikkuu ja tämän lisäksi joko ovi on auki tai vihreä valo palaa.*
- *Ei pidä paikkaansa, että vihreä valo ei pala.*
- *Joten juna liikkuu ja ovi on auki.*

Ratkaisu: Antakaamme p_0:n tarkoittaa lausetta "Juna liikkuu.", p_1:n tarkoittaa lausetta "Ovi on auki." ja p_2:n tarkoittaa lausetta "Vihreä valo palaa."

Antakaamme A:n tarkoittaa propositiolausetta $p_0 \wedge p_1$, B:n tarkoittaa propositiolausetta $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$ ja C:n tarkoittaa propositiolausetta $\neg\neg p_2$.

Meiltä kysytään miksi emme voi johtaa lausetta A lauseista B ja C. Toisin sanoen meitä on pyydetty näyttämään, että ei ole olemassa luonnollista päättelyä joka johtaisi A:n B:stä ja C:stä.

Jos $v(p_1) = 0$ ja $v(p_0) = v(p_2) = 1$ niin silloin $v(B) = 1$ ja $v(C) = 1$, mutta $v(A) = 0$. Joten eheyslauseen nojalla A:ta ei voida päätellä lauseista B ja C. $\Box$

1.10.4 Tehtävät

Tehtävä 98 *Näytä, että seuraava päättely ei päde:*

1. *Jos isoäiti osaa lentää, niin silloin isoäiti ei ole kivi.*
2. *Isoäiti ei osaa lentää.*
3. *Siis, isoäiti on kivi.*

Tehtävä 99 *Näytä, että seuraava päättely ei päde:*

1. *Jos Varsovassa sataa vettä, niin silloin sataa vettä Wienissä tai lunta Helsingissä.*
2. *Wienissä ei sada vettä, mutta Helsingissä sataa lunta.*
3. *Siis Varsovassa sataa vettä.*

Tehtävä 100 *Näytä, että lausetta $\neg(p_0 \to p_1)$ ei voida päätellä lauseesta $\neg p_0 \to p_1$.*

Tehtävä 101 *Näytä, että lausetta $\neg p_0 \wedge \neg p_1$ ei voida päätellä lauseesta $\neg(p_0 \wedge p_1)$.*

Tehtävä 102 *Näytä, että lausetta $\neg(p_0 \vee p_1)$ ei voida päätellä lauseesta $\neg p_0 \vee \neg p_1$.*

Tehtävä 103 *Näytä, että seuraava päättely ei päde:*

1. *Jos kirjekuori sisältää salasanan ja vihreä valo palaa, niin ovi voidaan avata.*
2. *Vihreä valo ei pala.*
3. *Joten, jos ovea ei voida avata, kirjekuoressa ei ole salasanaa.*

1.11 Semanttiset puut

Semanttiset todistukset ovat yksi kätevimmistä ja helpoimmista todistusmenetelmistä. A:n semanttisessa todistuksessa rakennamme semanttisen puun $\neg A$:lle ja näytämme, että kaikki puun oksat sulkeutuvat. Puun sulkeutuminen merkitsee sitä, että A on tautologia. Intuitiivisesti puun sulkeutuminen merkitsee, että kaikki $\neg A$:n vaihtoehdot on käyty läpi ja osoittautuvat mahdottomiksi, joten A:n on oltava tautologia.

Semanttinen puu väitteelle A kuvailee minkä kaiken pitää olla totta, jotta väite A voi olla totta. Esimerkiksi jos $A \wedge B$ on tosi, niin silloin A:n ja B:n on oltava tosi, joten kirjoitamme ne $A \wedge B$:n alle.

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

Jos $A \vee B$ on totta, niin silloin A:n tai B:n pitää olla totta, mutta emme tiedä kumman, joten jaamme puun kahteen oksaan. Yksi oksa A:lle ja yksi oksa B:lle.

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \widehat{A \quad B} \end{array}$$

1.11.1 Semanttisten puiden säännöt

Semanttisten puiden keskeinen idea on, että seuraavaan puun haaraan tulevat ne kaksi kaavaa jotka ovat lauseen pääkonnektiivin molemmin puolin. Jokaista konnektiivia, paitsi negaatiota, varten tarvitsemme kaksi sääntöä. Konnektiivien säännöt menevät seuraavasti:

- Disjunktio

$$\begin{array}{c} A \lor B \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \qquad B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \lor B) \\ \mid \\ \neg A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$$

- Konjunktio

$$\begin{array}{c} A \land B \\ \mid \\ A \\ \mid \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \land B) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad \neg B \end{array}$$

- Negaatio

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ \mid \\ A \end{array}$$

- Implikaatio

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ \mid \\ A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$$

- Ekvivalenssi

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg A & A \\ \mid & \mid \\ \neg B & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ \diagup & \diagdown \\ \neg A & A \\ \mid & \mid \\ B & \neg B \end{array}$$

1.11.2 Semanttinen todistus

Semanttisen puun oksa on *suljettu* jos siihen tulee ristiriita, eli siinä on sekä B että $\neg B$ jollekin B. A:n semanttinen todistus on $\neg A$:n semanttinen puu, jossa kaikki oksat ovat sulkeutuneet eli päättyneet ristiriitaan. Semanttinen todistus osoittaa, että A on tautologia, osoittamalla, että $\neg A$ ei ole koskaan mahdollista.

1.11.3 Esimerkki

$A \lor (A \to B)$:n semanttinen todistus on $\neg(A \lor (A \to B))$:n semanttinen puu jossa kaikki oksat päättyvät ristiriitaan. Rakennamme nyt tämän puun, oksa oksalta:

$$\begin{array}{c} \neg(A \lor (A \to B)) \\ \mid \\ \neg A \\ \mid \\ \neg(A \to B) \\ \mid \\ A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$$

Semanttisessa puussa jonka piirsimme on vain yksi oksa, jossa on molemmat väitteet A ja $\neg A$. Tämä on ristiriita. Tämän takia puu toimii todistuksena lauseelle $A \lor (A \to B)$. Voisi sanoa että kokeilimme mitä tapahtuisi jos $A \lor (A \to B)$:n vastakohta olisi tosi, eli $\neg(A \lor (A \to B))$ ja huomasimme, että siitä tuli looginen ristiriita eli se piti hylätä. Täten meille jää $A \lor (A \to B)$. Tämä myös toimii todistuksena siitä että $A \lor (A \to B)$ on tautologia.

1.11.4 Haarautuminen

Asiaankuuluvien sääntöjen soveltaminen lauseisiin kuten $A \lor B$ tai $\neg(A \land B)$ johtavat puun haarautumiseen. On tärkeää, että haarautuminen tapahtuu jokaisen oksan päässä joka menee kaavan läpi. Katso seuraavaa esimerkkiä! Rakennamme $(A \lor B) \land (C \lor D)$:n semanttisen puun:

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{(A \lor B) \land (C \lor D)} \\ \multicolumn{4}{c}{\mid} \\ \multicolumn{4}{c}{A \lor B} \\ \multicolumn{4}{c}{\mid} \\ \multicolumn{4}{c}{C \lor D} \\ \multicolumn{2}{c}{\diagup} & \multicolumn{2}{c}{\diagdown} \\ \multicolumn{2}{c}{C} & \multicolumn{2}{c}{D} \\ \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ A & B & A & B \end{array}$$

1.11.5 Semanttinen puu–menetelmän eheys

Semanttisen puu menetelmä toteuttaa *eheyslauseen*: Jokainen kaava, jolla on semanttinen todistus, on tautologia.

Vielä parempaa: Semanttisen puu menetelmä toteuttaa myös *täydellisyyslauseen*: Kaavalla on semanttinen todistus jos ja vain jos se on tautologia.

Näiden todistukset eivät ole vaikeita, mutta ne sivuutetaan.

1.11.6 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 104 *Esitä lauseen $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ semanttinen todistus.*

Ratkaisu:

$$\begin{array}{c}
\neg(\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)) \\
| \\
\neg(A \wedge B) \\
| \\
\neg(\neg A \vee \neg B) \\
| \\
\neg\neg A \\
| \\
\neg\neg B \\
\begin{array}{cc} \neg A & \neg B \end{array}
\end{array}$$

Semanttisessa puussa on kaksi haaraa. Yhdessä on $\neg A$ ja $\neg\neg A$ ja toisessa on $\neg B$ ja $\neg\neg B$. Joten molemmat puun oksat ovat suljettu. □

Tehtävä 105 *Esitä lauseen $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$ semanttinen todistus.*

Ratkaisu:

$$\begin{array}{c}
\neg((A \vee B) \rightarrow (B \vee A)) \\
| \\
A \vee B \\
| \\
\neg(B \vee A) \\
| \\
\neg B \\
| \\
\neg A \\
\begin{array}{cc} A & B \end{array}
\end{array}$$

Semanttisessa puussa on kaksi haaraa. Yhdessä on A ja $\neg A$ ja toisessa on B ja $\neg B$. Siis molemmat puun oksat ovat suljettu. □

Tehtävä 106 *Esitä lauseen $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ semanttinen todistus.*

Ratkaisu:

$$\begin{array}{c}
\neg((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)) \\
| \\
A \wedge B \\
| \\
\neg(B \wedge A) \\
| \\
A \\
| \\
B \\
\begin{array}{cc} \neg A & \neg B \end{array}
\end{array}$$

Tämä semanttinen puu on suljettu kuten edellisetkin. □

Tehtävä 107 *Esitä lauseen $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ semanttinen todistus.*

Ratkaisu:

$$\begin{array}{c}
\neg(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \\
| \\
\neg A \\
| \\
\neg(A \rightarrow B) \\
| \\
A \\
| \\
\neg B
\end{array}$$

Semanttisessa puussa on vain yksi haara. Tässä yhdessä haarassa meillä on A ja $\neg A$ joten oksa on suljettu eli koko puu on suljettu. □

Tehtävä 108 *Esitä lauseen $(p_0 \wedge (p_0 \rightarrow (p_1 \vee \neg p_0))) \rightarrow p_1$ semanttinen todistus.*

Ratkaisu:

$$\begin{array}{c}
\neg((p_0 \wedge (p_0 \rightarrow (p_1 \vee \neg p_0)))\rightarrow p_1) \\
| \\
p_0 \wedge (p_0 \rightarrow (p_1 \vee \neg p_0)) \\
| \\
\neg p_1 \\
| \\
p_0 \\
| \\
p_0 \rightarrow (p_1 \vee \neg p_0) \\
\begin{array}{cc} \neg p_0 & \begin{array}{c} p_1 \vee \neg p_0 \\ \begin{array}{cc} p_1 & \neg p_0 \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}$$

Puun jokainen oksa on suljettu, eli tämä semanttinen puu on lauseen $(p_0 \wedge (p_0 \rightarrow (p_1 \vee \neg p_0))) \rightarrow p_1$ semanttinen todistus. □

1.11.7 Tehtävät

Tehtävä 109 *Analysoi seuraava semanttinen puu: mitä sääntöjä siinä käytetään ja miksi oksia sulkeutuu? Minkä propositiolauseen semanttinen todistus tämä puu on?*

$$
\begin{array}{c}
\neg((p_0 \wedge (p_0 \to (p_1 \vee \neg p_0))) \to p_1) \\
| \\
(p_0 \wedge (p_0 \to (p_1 \vee \neg p_0))) \\
| \\
\neg p_1 \\
| \\
p_0 \\
| \\
p_0 \to (p_1 \vee \neg p_0) \\
\begin{array}{cc}
\neg p_0 & \begin{array}{c} p_1 \vee \neg p_0 \\ \begin{array}{cc} p_1 & \neg p_0 \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Tehtävä 110 *Analysoi seuraava semanttinen puu: mitä sääntöjä siinä käytetään ja miksi oksia sulkeutuu? Minkä propositiolauseen semanttinen todistus tämä puu on?*

$$
\begin{array}{c}
\neg(((A \to B) \to A) \to A) \\
| \\
(A \to B) \to A \\
| \\
\neg A \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array} & A
\end{array}
\end{array}
$$

Tehtävä 111 *Esitä lauseen* $(A \wedge C) \to (A \wedge (B \vee C))$ *semanttinen todistus.*

Tehtävä 112 *Esitä lauseen* $(A \wedge (B \vee C) \wedge \neg C) \to (A \wedge B)$ *semanttinen todistus.*

Tehtävä 113 *Esitä lauseen* $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \vee C))$ *semanttinen todistus.*

Tehtävä 114 *Esitä lauseen* $(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ *semanttinen todistus.*

Tehtävä 115 *Esitä lauseen* $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (A \vee (B \wedge C))$ *semanttinen todistus.*

Tehtävä 116 *Esitä lauseen* $(A \wedge C) \to (A \wedge (B \vee C))$ *semanttinen todistus.*

Luku 2

Predikaattilogiikka

2.1 Johdanto

Kun siirrymme propositiologiikasta predikaattilogiikkaan, puhumme täysin uudentyyppisistä asioista. Predikaattilogiikka yrittää samaa asiaa, kuin propositiologiikka – selittää asiaintiloja maailmassa – tavalla joka on riittävän täsmällinen, jotta voimme johdonmukaisesti tutkia käsitteitä kuten totuus ja todistus, ehkäpä jopa tavalla jota tietokone voisi ymmärtää. Ero on siinä, että predikaattilogiikassa meillä on huomattavasti rikkaampi kieli kuin propositiologiikassa. Predikaattilogiikka käsittelee alkioiden ominaisuuksia ja alkioiden välisiä suhteita annetun mallin universumissa. Voimme käsitellä yleisiä ominaisuuksia ja yhtälöiden ratkaisujen olemassaoloa. Propositiologiikassa lause

"Jotkut linnut eivät lennä mutta jotkut nisäkkäät lentävät."

kirjoitetaan epäinformatiivisesti

$$p_0 \wedge p_1.$$

Sen sijaan predikaattilogiikassa samasta lauseesta tulee huomattavasti monimutkaisempi

$$\exists x(B(x) \wedge \neg F(x)) \wedge \exists y(M(y) \wedge F(y)),$$

jossa on selvästi enemmän tietoa ja on hyödyllisempi. Mutta nyt tarvitsemme tietenkin enemmän sääntöjä. Tuonti- ja eliminointisäännöt konjunktiota, disjunktiota, negaatiota, implikaatiota ja ekvivalenssia varten eivät sano mitään symbolista $\exists$. Predikaattilogiikassa käy myös ilmi että totuusjakauma käsitteenä ei ole tarpeeksi informatiivinen selittämään paljon monimutkaisempaa predikaattilogiikan teoriaa. Tarvitsemme struktuurin – tai mallin – käsitteen, ja tämä on asia millä aloitamme tutkimuksemme predikaattilogiikan maailmasta.

2.2 Erityyppisiä malleja

Aloitamme keskustelemalla predikaattilogiikan struktuureista, eli malleista.

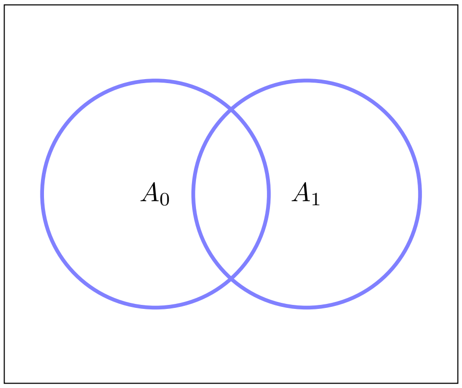
2.2.1 Yksipaikkaiset mallit

Yksipaikkainen eli unaarinen struktuuri, $\mathcal{M}$ koostuu epätyhjästä *määrittelyjoukosta*, joka tunnetaan myös struktuurin *universumina*, ja useasta sen osajoukosta nimeltään *(yksipaikkaiset) predikaatit*. Predikaatit merkitään symboleilla $A_0, A_1, ...$ Esimerkkejä yksipaikkaisista predikaateista missä tahansa joukossa M ovat:

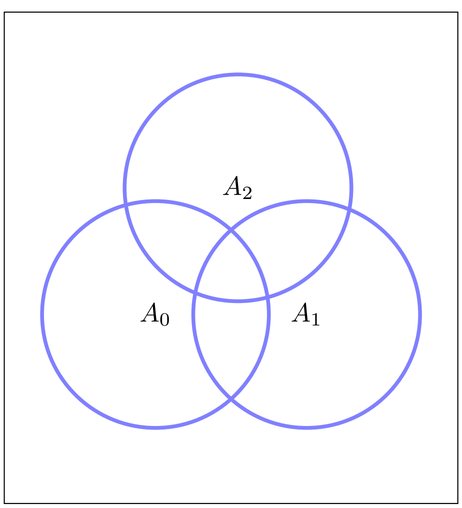
Tyhjä predikaatti	$\emptyset$
Täysi predikaatti	M
Yksiö predikaatti	$\{a\}$

Yksi predikaatti jakaa mallin universumin kahteen osaan, kaksi predikaattia jakaa sen neljään osaan jne. Yksipaikkaista mallia jonka universumi on M ja predikaatit $A_1, \ldots, A_n$, merkitään:

$$\mathcal{M} = (M, A_1, \ldots, A_n).$$



Esimerkiksi M voisi olla joukko ihmisiä ja A_0 voisi olla kaikki joukon naiset. Joten nyt joukko M jakautuu kahteen pienempään joukkoon, niihin jotka kuuluvat ryhmään A_0, ja niihin jotka eivät. Tai oletetaan taas, että M on joukko ihmisiä, A_0 voisi olla joukon country musiikin fanit ja A_1 taas joukon jazz musiikin fanit. Tällöin M jakautuu niihin ihmisiin jotka tykkäävät countrysta mutta eivät jazzista, niihin jotka tykkäävät jazzista mutta eivät countrysta, niihin jotka tykkäävät molemmista, ja niihin jotka eivät tykkää kummastakaan. Alkioiden luokittelu sen mukaan mitä niistä tiedetään on hyvin tyypillistä predikaattilogiikalle. Huomaa, että jotkin neljästä joukosta voivat olla tyhjiä, mutta kaikissa joukoissa yhteensä on yhteensä yhtä monta alkiota, kuin M:ssä. Jos lisäämme kolmannen joukon eli ihmiset jotka tykkäävät klassisesta musiikista M jakautuu kahdeksaan joukkoon:



1. Tykkää klassisesta mutta ei countrysta tai jazzista.
2. Tykkää countrysta mutta ei klassisesta tai jazzista.
3. Tykkää jazzista mutta ei klassisesta tai countrysta.
4. Tykkää klassisesta ja countrysta mutta ei jazzista.
5. Tykkää klassisesta ja jazzista mutta ei countrysta.
6. Tykkää countrysta ja jazzista mutta ei klassisesta.
7. Tykkää countrysta, jazzista ja klassisesta.
8. Ei tykkää klassisesta, jazzista eikä countrysta.

Taas jotkut näistä joukoista saattavat olla tyhjiä, mutta yhteensä niissä on yhtä monta alkiota kuin joukossa M.

2.2.2 Laattamalli

Laattamalli koostuu värillisistä laatoista jotka ovat järjestetty riviin kuten alla oleva kuva näyttää (osoitamme värit kirjaimilla: P” on punainen, “S” on sininen ja “K” on keltainen):

| P | S | S | P | K |

Esimerkki 2.1 Esimerkkejä laattamalleista

| *P* | *P* | *P* | *P* | *P* |

| *S* | *S* | *S* | *S* |

| *P* | *S* | *P* |

| *K* | *P* | *P* | *S* | *S* | *P* | *K* |

| *S* | *S* | *K* | *P* | *S* | *K* | *S* | *P* | *P* | *S* | *P* | *K* |

Laattojen oleelliset ominaisuudet ovat laattojen väri ja niiden järjestys rivissä (toisin sanoen ovatko ne vasemmalla vai oikealla puolella jostain muusta laatasta).

2.2.3 Matemaattinen määrittely laattamallista

Laattamalli $\mathcal{T}$ koostuu äärellisestä määrästä objekteja joita kutsumme *laatoiksi*. Jokaiselle laatalle x pätee täsmälleen yksi predikaatti $S^{\mathcal{T}}(x)$ eli "x on sininen", $P^{\mathcal{T}}(x)$ eli "x on punainen", $K^{\mathcal{T}}(x)$ eli "x on keltainen". Mallissa on myös määritelty järjestysrelaatio $<^{\mathcal{T}}$. Jos $x <^{\mathcal{T}} y$, sanomme, että x on y:n "vasemmalla puolella" ja y on x:n "oikealla puolella". *Järjestysrelaatio* äärellisessä joukossa on määrittely sen mukaan, mikä alkio tulee ensin, mikä seuraavaksi jne.

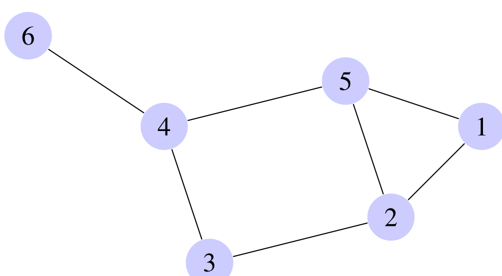
Laattamalli voi ilmetä monessa muodossa. Esimerkiksi: ei ole tärkeää mitä värit ovat, kuhan voimme erottaa laatat toisistaan niiden avulla. Voimme ajatella sanoja jotka koostuvat kolmesta kirjaimesta, tai jopa vain kolmesta eri symbolista, ja ajatella niitä laattamalleina.

Merkitsemme laattamallia:

$$\mathcal{T} = (T, S^{\mathcal{T}}, P^{\mathcal{T}}, K^{\mathcal{T}}, <^{\mathcal{T}}).$$

2.2.4 Verkot

Verkko koostuu solmuista ja reunoista (tai viivoista) solmujen välissä kuten kuva näyttää:



Kahta solmua joiden välissä on reuna kutsutaan *naapureiksi*.

Verkkoja voidaan käyttää hyväksi monissa käytännön ongelmmissa, esimerkiksi: tietoliikenteessä, viestintäverkoissa, tieverkoissa, luonnollisen kielen rakenteessa, bioinformatiikassa, genomiikassa, molekyylikemiassa jne. Matematiikassa verkkoja käytetään esimerkiksi: kombinatoriikassa, geometriassa, topologiassa ja ryhmäteoriassa.

Matemaattinen määritelmä verkoille on seuraavanlainen:

Lause 2.2 Verkko $\mathcal{G}$ koostuu sen universumista G, jota kutsutaan solmujen joukoksi, ja kaksipaikkaisesta predikaatista xEy (tarkemmin $xE_{\mathcal{G}}y$) jota kutsutaan reuna–relaatioksi.

Jos xEy pätee niin silloin x on y:n **naapuri** ja päinvastoin. Verkossa mikään solmu ei ole itsensä naapuri (antirefleksiivisyys). Myös, jos xEy pätee niin silloin myös yEx pätee (symmetrisyys). Joskus liitämme värejä solmuihin jolloin verkosta tulee väritetty verkko.

2.2.5 Luonnolliset luvut

Luonnollisten lukujen malli $\mathcal{N}$ koostuu joukosta $\mathbb{N}$ ei–negatiivisia kokonaislukuja $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Niillä on luonnollinen järjestys $x < y$ (tarkemmin $<^{\mathcal{N}}$) missä 0 on pienin ja jokaiselle alkiolle x on seurana isompi alkio, nimittäin $x+1$. Merkitsemme luonnollisten lukujen järjestettyä joukoa symbolilla:

$$\mathcal{N} = (N, <).$$

2.2.6 Muita malleja

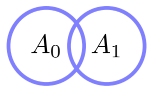
Esimerkkejä muista yleisistä malleista matematiikassa ja tietojenkäsittelytieteessä:

- Suunnatut verkot
- Ekvivalenssirelaatiot
- Ryhmät
- Kunnat
- Boolen Algebra
- Hilat
- Puut

2.2.7 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 117 *Osoita, että seuraava lause pätee:*

Jos jokainen miljonääri on joko iloinen tai ei kiireinen, niin silloin jokainen kiireinen miljonääri on iloinen.

Yksipaikkainen malli 	$L = \{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, \ldots, P_{n-1}^{\mathcal{M}})$
Kaksipaikkainen malli	$L = \{R_0, \ldots, R_{n-1}\}$	$\mathcal{M} = (M, R_0^{\mathcal{M}}, \ldots, R_{n-1}^{\mathcal{M}})$
Sekamuotoinen malli	$L = \{P_0, R_0, c\}$	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}})$
Laattamalli P S S P K	$L = \{B, R, Y, <\}$	$\mathcal{T} = (T, B^{\mathcal{T}}, R^{\mathcal{T}}, Y^{\mathcal{T}}, <^{\mathcal{T}})$
Luonnollisten lukujen malli	$L = \{<\}$	$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}})$

Kuva 2.1: Joitain malleja ja aakkostoja

Ratkaisu: Miettikäämme kiireistä miljonäärtä ja nimetkäämme hänet x. Tiedämme, että x on iloinen tai ei kiireinen, mutta oletamme, että x on kiireinen. Joten x:n täytyy olla iloinen. Tällainen epämuodollinen päättely on hyvin tyypillistä predikaattilogiikalle kuten tulemme oppimaan, kun määrittelemme luonnollisen päättelyn hetken päästä. $\square$

Tehtävä 118 *Käytä yksipaikkaisia struktuureita näyttääksesi, että seuraava lause ei päde:*

> *Jos jokainen sadepäivä elokuussa on tuulinen, niin jokin tuulinen päivä elokuussa on sateinen.*

Ratkaisu: Antakaamme M:n olla hypoteettinen elokuun päivien joukko. Antakaamme A_0:n olla sateisten päivien joukko M:ssä ja A_1:n olla tuulisten päivien joukko M:ssä. Lause silloin sanoo, että "Jos A_1 sisältää A_0:n niin silloin jotkut A_1:n alkiot ovat A_0:ssa." Näin yleisessä esimerkissä käy selvästi niin, että tämä ei päde. Esimerkiksi, jos A_0 on tyhjä joukko, niin silloin A_1 sisältää A_0:n, mutta yksikään A_1:n alkio ei kuulu joukkoon A_0. $\square$

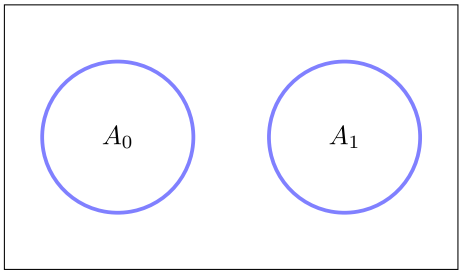
Tehtävä 119 *Käytä yksipaikkaisia struktuureita näyttääksesi, että seuraava lause ei päde:*

> *Jos on miljonäärejä ja jokainen miljonääri on iloinen tai ei kiireinen, niin silloin mikään kiireinen miljonääri ei ole iloinen.*

Ratkaisu: Antakaamme M:n olla joukko hypoteettisia miljonäärejä. Antakaamme A_0:n olla iloisten miljonäärien jouko M:ssä ja A_1:n olla kiireisten miljonäärien jouko M:ssä. Lause silloin sanoo, että "Jos jokainen alkio joukossa M on myös joukossa A_0, tai joukon A_1 komplementissa, niin silloin yksikään alkio joukosta A_1 ei ole joukossa A_0." Näin yleisessä tilanteessa käy selvästi niin, että tämä ei päde. Esimerkiksi, jos $M = \{Tom\}$, $A_0 = M$ ja $A_1 = M$, niin silloin jokainen alkio joukosta M on myös joukossa A_0 tai joukon A_1 komplementissa, mutta jotkut alkiot joukosta A_1 ovat myös joukossa A_0. $\square$

Tehtävä 120 *Piirrä yksipaikkainen struktuuri missä kaksi predikaattia jakavat määrittelyalueen kolmeen osaan. Anna arkielämän esimerkki.*

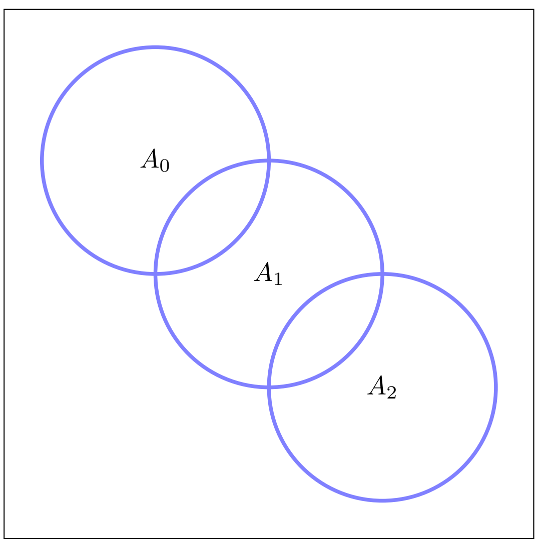
Ratkaisu: Antakaamme joukon M olla kaikki suomalaiset, joukon A_0 olla kaikki suomalaiset jotka ovat pidempia kuin 190cm ja joukon A_1 olla kaikki suomalaiset jotka ovat lyhyempiä kuin 170cm.



□

Tehtävä 121 *Piirrä yksipaikkainen struktuuri missä kolme predikaattia jakavat määrittelyalueen kuuteen osaan. Anna arkielämän esimerkki.*

Ratkaisu: Antakaamme joukon M olla kaikki eurooppalaiset, joukon A_0 olla kaikki eurooppalaiset jotka asuvat Suomessa, joukon A_1 olla kaikki euroopplaiaset jotka puhuvat ranskaa ja joukon A_2 olla kaikki eurooppalaiset jotka asuvat Italiassa.



□

Tehtävä 122 *Onko totta, että jos laattamallissa jokaisen sinisen laatan vasemmalla puolella on punainen laatta, niin silloin jokaisen punaisen laatan oikealla puolella on sininen laatta?*

Ratkaisu: Mallissa (2.1) on tosiaan totta, että jokaisen sinisen laatan vasemmalla puolella on punainen laatta, ja jokaisen punaisen laatan oikealla puolella on sininen laatta.

$$\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{S}} \tag{2.1}$$

Toisaalta, mallissa (2.2), jokaisen sinisen laatan vasemmalla puolella on taas punainen laatta, mutta viimeisen punaisen laatan oikealla puolella ei olekaan sinistä (tai minkään muun väristä) laattaa.

$$\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{P}} \tag{2.2}$$

Viimeinen tapaus, eli malli (2.3), on mielenkiintoinen tapaus. Jokaisen olemattoman sinisen laatan vieressä on tosiaan punainen laatta, mutta jokaisen punaisen laatan oikealla puolella ei todellakaan ole sinistä laattaa.

$$\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{P}} \tag{2.3}$$

Siis vastaus kysymykseen on ei. □

Tehtävä 123 *Onko totta, että jos mallissa on jokaisen sinisen tai keltaisen laatan vasemmalla puolella punainen laatta ja mallissa on punainen laatta, niin silloin siinä on myös keltainen laatta.*

Ratkaisu: Mallissa (2.4) on totta, että jokaisen sinisen tai keltaisen laatan vasemmalla puolella on punainen laatta ja on myös totta, että mallissa on keltainen laatta.

$$\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{K}}\boxed{\mathrm{S}} \tag{2.4}$$

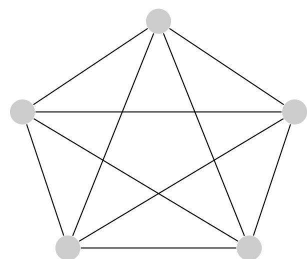
Toisaalta malissa (2.5) jokaisen sinisen tai keltaisen laatan vasemalla puolella on punainen laatta ja mallissa on punainen laatta, mutta siinä ei ole yhtään keltaista laattaa.

$$\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{P}}\boxed{\mathrm{S}} \tag{2.5}$$

Siis vastaus kysymykseen on ei. □

Tehtävä 124 *Olettakaamme, että verkossa on 10 reunaa. Kuinka monta solmua siinä on vähintään? Entä jos siinä on 100 reunaa?*

Ratkaisu: Jokainen reuna liittyy kahteen solmuun. n solmusta voidaan saada enintään $n(n-1)/2$ reunaa. Jos $n < 5$ niin silloin saamme < 7 reunaa. Jos $n = 5$ on mahdollista saada 10 reunaa, kuten alla oleva verkko todistaa. Jos meillä on 100 reunaa, tarvitsemme 15 solmua.



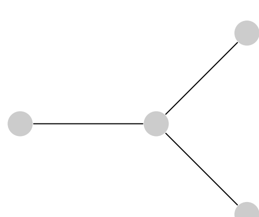
□

Tehtävä 125 *Todista, että jos verkossa on ainakin kaksi reunaa ja yhdellä solmulla on kaikki muut solmut naapurina, niin silloin kaikilla solmuilla on naapuri.*

Ratkaisu: Olettakaamme, että x on solmu jolla on kaikki muut solmut naapurinaan. Olettakaamme sitten, että y on mielivaltainen solmu. Jos y ei ole x, niin silloin x on y:n naapuri, jolloin y:llä on naapuri. Jos $y = x$ niin voimme todistaa lauseen seuraavasti: Koska verkossa on vähintään kaksi solmua on olemassa solmu $z \neq x$. Valitsemamme x:n mukaan, z on naapuri x:lle, mutta $x = y$. Joten y:llä on myös naapuri. □

Tehtävä 126 *Todista, että seuraava lause ei päde verkoissa yleisesti: Jos jollain solmulla on jokainen muu solmu naapurinaan, niin silloin jokainen solmu on naapuri solmulle jolle kaikki muut solmut ovat naapureita.*

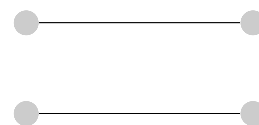
Ratkaisu: Kuvassa verkon keskimmäinen solmu on kaikkien muiden solmujen naapuri, mutta sen naapurisolmut ovat kolme ulommaista solmua ja ne eivät ole kaikkien muiden solmujen naapureita.



□

Tehtävä 127 *Todista, että seuraava lause ei päde verkoissa yleisesti: Jos jokaisella solmulla on naapuri, niin silloin jollain solmulla on jokainen muu solmu naapurinaan.*

Ratkaisu: Seuraavassa verkossa kaikille solmuilla on naapuri, mutta millään solmulla ei ole kaikkia muita solmuja naapurinaan.



□

Tehtävä 128 *Olettakaamme, että verkolla on kuusi solmua. Näytä, että on kolme solmua jotka ovat kaikki toistensa naapureita tai sitten eivät ole keskenään naapureita.*

Ratkaisu: Valitkaamme yksi solmu ja nimetkäämme se v. Loput solmut jaamme kahteen joukkoon. Joukkoon A ne jotka ovat v:n naapureita, ja joukkoon B ne jotka eivät ole naapureita v:lle. Koska A ja B sisältävät yhteensä viisi alkiota, yhdessä niistä on oltava vähintään kolme alkiota. Olettakaamme, että se on vaikka joukko A. Jos A:n alkiot eivät ole naapureita keskenään niin olemme valmiita.

Nyt olettakaamme, että kaksi A:n alkiota ovat naapureita. Nimetkäämme ne u ja w. Nyt u, v ja w ovat kaikki naapureita.

Meidän täytyy myös harkita tapausta jossa B se on joukko jossa on vähintään kolme alkiota.

Jatkamme samaan malliin. Jos kaikki B:n alkiot ovat naapureita, olemme valmiita. Jos näin ei käy, joukossa on pakko olla alkiot u ja w jotka eivät ole naapureita. Nyt u, v ja w muodostavat kolmen alkion joukon missä mikään kolmesta alkiosta ei ole keskenään naapuri. □

2.2.8 Tehtävät

Tehtävä 129 *Piirrä unaarinen, eli yksipaikkainen, struktuuri missä kolme predikaattia jakavat joukon seitsemään osaan. Anna arkipäivän esimerkki.*

Tehtävä 130 *Anna esimerkki laattamallista missä on useita laattoja kaikissa kolmessa värissä ja kahden saman värisen laatan välissä aina erivärinen laatta. Miksi emme voi vaatia, että kahden samanvärisen laatan välissä olisi kolmas samanvärinen laatta?*

Tehtävä 131 *Onko totta, että jos laattamallissa on jokaisen sinisen tai keltaisen laatan vasemmalla puolella punainen laatta niin vasemmanpuolisin laatta on aina punainen.*

Tehtävä 132 *Onko totta, että jos laattamallissa on jokaisen sinisen tai keltaisen laatan vasemmalla tasan kolme punaista laattaa niin kaikki punaiset laatat ovat kaikkien sinisten ja keltaisten laattojen vasemmalla puolella.*

Tehtävä 133 *Todista, että seuraava väite on epätosi: Olettakaamme, että verkossa on viisi solmua. Silloin on kolme solmua jotka ovat joko kaikki toistensa naapureita tai eivät ole keskenään naapureita ollenkaan.*

2.3 Lisää Malleista

2.3.1 Mallin yleinen käsite

Tähän asti käsittelemämme mallit ovat olleet hyvin erilaisia, mutta loppujen lopuksi niillä kaikilla on seuraavat yhteiset piirteet:

- Niillä on universumi joka on ei-tyhjä joukko.
- Niillä on joitain yksipaikkaisia predikaatteja kuten "punainen" tai "mies".
- Niillä on joitain kaksipaikkaisia predikaatteja kuten "oikealla puolella" tai "suurempi kuin".
- Niillä on joitain nimettyjä alkioita kuten "nolla".
- Predikaattejen, relaatioiden ja alkioiden nimet muodostavat mallin *aakkoston*.

2.3.2 Relaatiot

Kaksipaikkainen relaatio joukossa M on mikä tahansa kokoelma R alkioita karteesisesta tulosta

$$M^2 = M \times M = \{(a,b) : a,b \in M\}.$$

Jos (a,b) kuuluu relaatioon R, kirjoitamme yksinkertaisuuden vuoksi aRb. Esimerkkejä relaatiosta jossakin joukossa M:

Tyhjä relaatio	$\emptyset$
Täysi relaatio	M^2
Identiteettirelaatio	$\{(a,b) \in M^2 : a = b\}$
Epäidentiteettirelaatio	$\{(a,b) \in M^2 : a \neq b\}$
Yksiörelaatio	$\{(a,b)\}$
Ensimmäinen projektiorelaatio	$\{(a,b) \in M^2 : a = c\}$
Toinen projektiorelaatio	$\{(a,b) \in M^2 : b = c\}$

2.3.3 Erillaisia relaatioita

Kaksipaikkaiset relaatiot ovat hyvin yleisiä. Jo ihmisten parissa on hyvin monta tuttua kaksipaikkaista relaatiota, kuten "x tuntee y:n", "x ja y ovat serkkuja" jne. On ilmennyt, että kaksipaikkaisilla relaatioilla voi olla mielenkiintoisia ominaisuuksia. Kaksipaikkainen relaatio on:

- Symmetrinen jos aRb:stä seuraa bRa
- Refleksiivinen jos aRa pätee aina
- Transsiivinen jos aRb:stä ja bRc:stä seuraa aRc
- Antisymmetrinen jos aRb:stä seuraa, että ei bRa
- Antirefleksiivinen jos aRa ei koskaan päde

Mitä ominaisuuksia lauseilla "x tuntee y:n" ja "x ja y ovat serkkuja" on? Entä relaatio $x < y$ luonnollisten lukujen mallissa?

2.3.4 Aakkosto

Aakkosto on äärellinen määrä

- yksipaikkaisia predikaattisymboleija P_0, P_1, ...
- kaksipaikkaisia predikaattisymboleja R_0, R_1, ...
- vakiosymboleja c_0, c_1, ...

Voisimme myös tarkastella n-paikkaisia predikaattisymboleja kun $n > 2$ samoin kuin funktiosymboleja. Käytännössä käytämme usein muitakin symboleja predikaatti- ja vakiosymboleille kuin yllämainitut.

2.3.5 Struktuurit

Määritelmä 2.3 *Struktuuri tai malli $\mathcal{M}$ aakkostolle L ,uodostuu epätyhjästä joukosta M, nimeltään M:n universumi ja lisäksi:*

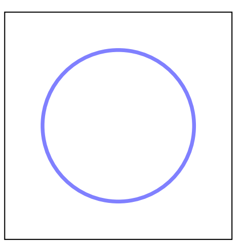
- *Yksipaikkaisesta predikaatista $P^{\mathcal{M}}$ M:ssä jokaista yksipaikkaista L:n predikaattisymbolia P kohti.*
- *Kaksipaikkaisesta relaatiosta $R^{\mathcal{M}}$ M:ssä jokaista kaksipaikkaista L:n predikaattisymbolia R kohti.*
- *Alkiosta $c^{\mathcal{M}}$ M:ssä jokaista L:n vakiota c kohti.*

Joukko $P^{\mathcal{M}}$ on nimeltään P:n *tulkinta* $\mathcal{M}$:ssä. Samaan tapaan, relaatio $R^{\mathcal{M}}$ on nimeltään R:n *tulkinta* $\mathcal{M}$:ssä. Vihdoin, alkio $c^{\mathcal{M}}$ on nimeltään c:n *tulkinta* $\mathcal{M}$:ssä. Yleinen merkintätapa struktuurille on:

Aakkosto	struktuuri
P	$M = (M, P^{\mathcal{M}})$
P, R	$M = (M, P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}})$
P, R, c	$M = (M, P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}})$
jne.	

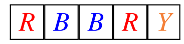
2.3.6 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 134 *Mikä aakkosto on alla olevalla unaarisellä struktuurilla $\mathcal{M}$?*



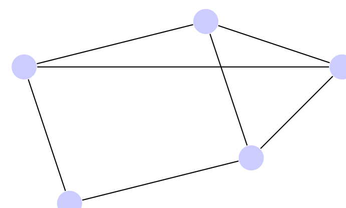
Ratkaisu: Aakkosto koostuu yhdestä unaarisesta predikaattisymbolista. Huomaa, että ei ole mahdollista sanoa aivan varmasti mikä aakkosto on pelkästään kuvaa katsomalla. Kuvassa voisi olla struktuuri jolla on kaksi unaarista predikaattia jotka ovat toistensa komplementteja. On myös mahdollista, että kuvassa on monta unaaristä predikaattia jotka ovat tyhjiä ja niitä ei täten voi erottaa toisistaan kuvassa. □

Tehtävä 135 *Mikä aakkosto on alla olevalla laattamallilla $\mathcal{M}$?*



Ratkaisu: Aakkosto koostuu yhdestä binäärisestä predikaattisymbolista $<$ ja kolmesta unaarisesta predikaattisymbolista Y, R ja B. Tämä on hyvin tyypillinen aakkosto laattamallille. Tietenkin jos mallissa on vähemmän värejä aakkosto voi olla pienempi. □

Tehtävä 136 *Mikä aakkosto on alla olevalla verkolla $\mathcal{M}$?*



Ratkaisu: Kuten kaikkien verkkojen aakkosto, tämän verkon aakkosto koostuu yhdestä binäärisestä predikaattisymbolista E. Monet struktuurit koostuvat ainakin osittain verkoista. Tällaisissa tapauksissa muu osa struktuuria määrittelee mitä muuta aakkostoon kuuluu predikaattisymbolin E:n lisäksi. □

Tehtävä 137 *Mikä on luonnollisten lukujen struktuurim aakkosto niiden luonnollisessa järjestyksessä:*

Ratkaisu: Vaikka luonnollisten lukujen joukossa on monia eri relaatioita ja funktioita, tässä esimerkissä tarkastelemme vain luonnollisten lukujen järjestystä $n < m$. Siispä aakkosto koostuu yhdestä binäärisestä predikaattisymbolista $<$. □

Tehtävä 138 *Onko seuraava lause tosi vai ei?*

Jos jokainen sateinen päivä elokuussa on tuulinen
ja elokuu 15 ei ole tuulinen, niin elokuu 15 ei ole sateinen.

Ratkaisu: Tämä pätee vuodesta huolimatta. Itse asiassa lause pätee sanojen "elokuu", "sateinen" tai "tuulinen" määritelmästä riippumatta. Jokainen struktuuri jossa predikaatit (sateinen, tuulinen) on tulkittu millä tahansa tavalla, toteuttavat lauseen. □

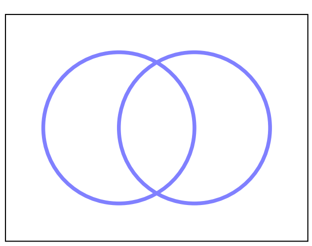
Tehtävä 139 *Onko seuraava lause tosi vai ei?*

Jos jokainen sateinen päivä elokuussa on tuulinen
ja elokuu 15 on tuulinen, niin elokuu 15 on sateinen.

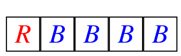
Ratkaisu: Tämä lause ei päde, koska lauseen looginen argumentointi on virheellinen. Voimme osoittaa loogisen virheen kuvailemalla struktuurin missä johtopäätelmä on epätosi. Esimerkki tämänkaltaisesta strukturista on teoreettinen elokuu missä sataa vain elokuu 1, mutta on tuulista 1 ja 15 päivä. □

2.3.7 Tehtävät

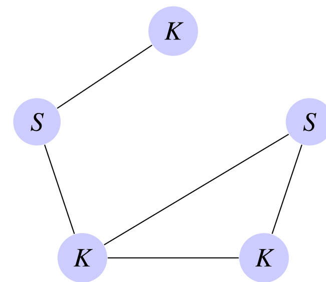
Tehtävä 140 *Mikä aakkosto on unaarisella struktuurilla $\mathcal{M}$?*



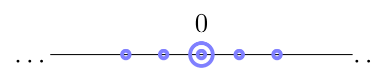
Tehtävä 141 *Mikä aakkosto on laattamallilla $\mathcal{M}$?*



Tehtävä 142 *Mikä aakkosto on väritetyllä verkolla $\mathcal{M}$? Kirjaimet viittaavat väreihin: "S" siniseen ja "K" keltaiseen.*



Tehtävä 143 *Mikä aakkosto on reaalilukujen struktuurilla varustettuna luonnollisella järjestyksellä ja nollalla?*



Tehtävä 144 *Totta vai tarua? Harkitse seuraavaa lausetta:*

Jos jokainen sateinen päivä elokuussa on tuulinen
ja jokainen elokuun päivä on sateinen,
niin silloin jokainen elokuun päivä on tuulinen.

Huomaatko, että tämä lause on totta riippumatta vuodesta, tai edes siitä miten määrittelemme sanat "elokuu", "sateinen" ja "tuulinen"?

Tehtävä 145 *Totta vai tarua? Harkitse seuraavaa lausetta:*

Jos jokainen tuulinen elokuun päivä on sateinen
ja elokuun 15 päivä ei ollut tuulinen,
niin silloin elokuun 15 päivä ei ollut sateinen.

Huomaatko, että lause on "loogisesti väärä"? Voitko osoittaa loogiset virheet kuvailemalla struktuurin missä oletukset pätevät, mutta johtopäätös ei?

2.4 Atomilauseet

2.4.1 Johdanto

Atomilauseet merkitsevät perusrelaatioita, kuten $x = y$ tai $x < y$, mitkä voivat olla tosia tai epätosia riippuen kaavassa olevien muuttujien arvoista. Predikaattilogiikan atomilauseilla on hyvin selkeä samankaltaisuus propositiologiikan atomilauseiden kanssa, mutta predikaattilogiikan atomilauseissa on paljon enemmän tietoa, koska käytämme muuttujia. Hieman epätäsmällisesti voisi sanoa, että lauseet joissa ei ole konnektiiveja tai kvanttoreja ovat atomilauseita. Atomilauseissa saattaa olla sisäistä tietoa mitä emme voi analysoida predikaattilogiikan antamilla työkaluilla, kuten lauseissa “Huomenna voi olla meri taistelu” ja “On mahdollista että sataa”. Tässä on joitain esimerkkejä predikaattilogiikan atomilauseista:

- x on keltainen
- x on korkeampi kuin y
- $4 < x$
- $x = 10$
- xEy
- $x < z$
- $P_0(x)$

2.4.2 Muuttujat

Muuttujia käytetään universaalisissa lauseissa kuten:

- Jos x ja y ovat luonnollisia lukuja, niin silloin $x < y$, $x > y$ tai $x = y$.
- Kaksi eri solmua verkossa ovat naapureita.
- Jokainen laatta on sininen tai punainen.

Muuttujia käytetään myös eksistenssilauseissa, kuten:

- On olemassa luonnollinen luku x jolle $x > 1010$ ja x on alkuluku.
- Jotkut solmut verkossa eivät ole naapureita.
- Jotkut laatat ovat keltaisen laatan vasemmalla puolella.

Muuttujia merkitään symboleilla x, y, z, u, v jne.; muuttujien ilmaisuun käytetään myös alaindeksejä x_0,x_1, ...

2.4.3 Tulkintafunktiot

Tulkintafunktiot ovat funktioita jotka antavat arvoja muuttujille.

Kun mietimme kaavan totuutta meillä pitää olla jokin malli mielessämme muuten kaava on merkityksetön. Esimerkiksi ei ole järkeä kysyä onko kaava xEy tosi vai epätosi, koska emme tiedä mitä muuttujat x ja y tarkoittavat saatikka mitä E tarkoittaa. Vaikka tietäisimmekin, että E on jonkin verkon reunarelaatio, meidän tulisi tietäää minkä verkon.

Olettakaamme siis, että meillä on malli $\mathcal{M}$ jolla on universumi M kuten:

- Joukko laattoja
- Joukko solmuja verkossa
- Joukko kokonaislukuja
- Joukko rationaalilukuja

Ajatus on, että muuttujien arvot ovat joukossa M. Matemaattisesti puhuen tulkintafunktio on funktio, joka kuvaa muuttujia joukkoon M.

Tässä on kolme tulkintafunktiota muuttujille x, y ja z:

- $s_0(x) = 1, s_0(y) = 5, s_0(z) = 1$
- $s_1(x) = 1, s_1(y) = 1, s_1(z) = 3$
- $s_2(x) = 1, s_2(y) = 2, s_2(z) = 4$

Voimme esitellä tämänkaltaista tietoa huomattavasti pienemmässä tilassa seuraavasti:

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	1	3
s_2	1	2	4

2.4.4 Lisää atomikaavoista

Yllä näkyvä tulkintafunktio s_0 toteuttaa atomilauseen $x = z$, koska $s_0(x) = s_0(z)$. Yllä näkyvä tulkintafunktio s_1 taas toteuttaa atomilauseen $x = y$, koska $s_1(x) = s_1(y)$.

Määritelmä 2.4 *1. Tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $x = y$ jos s antaa saman arvon x:lle ja y:lle, eli $s(x) = s(y)$.*

2. *Tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $P_n(x)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos $s(x) \in P_n^{\mathcal{M}}$.*

3. *Tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $R(x, y)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos $(s(x), s(y)) \in R^{\mathcal{M}}$*

4. *Tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $x = c$ mallissa $\mathcal{M}$ jos s antaa arvon $c^{\mathcal{M}}$ x:lle, eli $s(x) = c^{\mathcal{M}}$.*

5. *Tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $c = y$ mallissa $\mathcal{M}$ jos s antaa arvon $c^{\mathcal{M}}$ y:lle, eli $s(y) = c^{\mathcal{M}}$.*

6. *Tulkintafunktiot s toteuttaa atomilauseen $R(x, c)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos $(s(x), c^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$.*

7. *Tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $R(c, y)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos $(c^{\mathcal{M}}, s(y)) \in R^{\mathcal{M}}$.*

Määritelmä 2.5 1. *$c = d$ on* tosi *$\mathcal{M}$:ssä jos $c^{\mathcal{M}} = d^{\mathcal{M}}$.*

2. *$P_i(c)$ on* tosi *$\mathcal{M}$:ssä jos $c^{\mathcal{M}} \in P_i^{\mathcal{M}}$.*

3. *$R_i(c, d)$ on* tosi *$\mathcal{M}$:ssä jos $(c^{\mathcal{M}}, d^{\mathcal{M}}) \in R_i^{\mathcal{M}}$.*

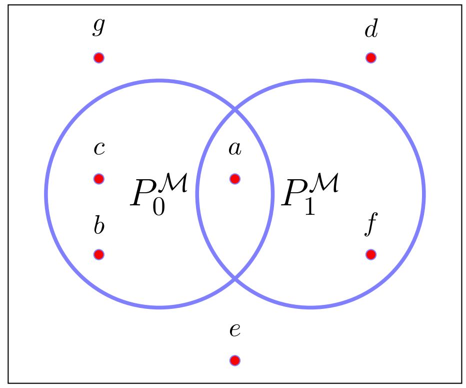
Seurauksena määritelmästämme, tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen xEy:n verkossa G, jos $s(x)$ ja $s(y)$ ovat verkossa naapureita. Samaan tapaan tulkintafunktio s toteuttaa atomilauseen $P(x)$, "x on punainen", laattamallissa, jos $s(x)$ on mallissa punainen.

Huomaa: Määritelmämme toimii, vaikka muuttujat olisivat kirjoitettu joillain muilla symboleilla.

2.4.5 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 146 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat atomilauseen $P_0(x)$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

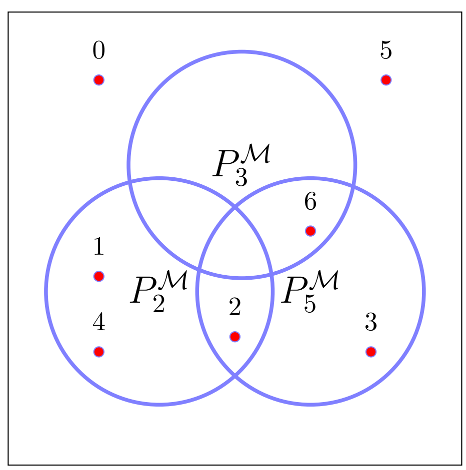
	x	y	z
s_0	b	a	d
s_1	c	b	c
s_2	g	a	g



Ratkaisu: Tulkintafunktiot s_0 ja s_1 toteuttavat atomilauseen $P_0(x)$ koska alkiot $s_0(x) = b$ ja $s_1(x) = c$ kuuluvat joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$.Tulkintafunktio s_2 ei toteuta atomilausetta $P_0(x)$ koska $s_2(x) = g$ ei kuulu joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$.
□

Tehtävä 147 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat atomilauseen $P_2(z)$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

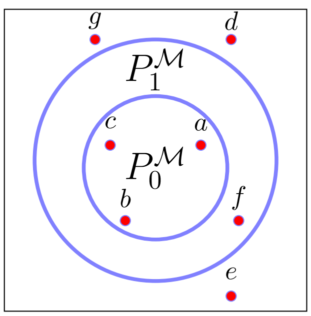
	x	y	z
s_0	1	2	5
s_1	1	6	0
s_2	1	4	6



Ratkaisu: Yksikään tulkintafunktio ei toteuta atomilausetta $P_2(z)$ koska mikään z:n arvo ei ole joukossa $P_2^{\mathcal{M}}$.
□

Tehtävä 148 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $P_1(x)$ seuraavassa unaaristruktuurissa?*

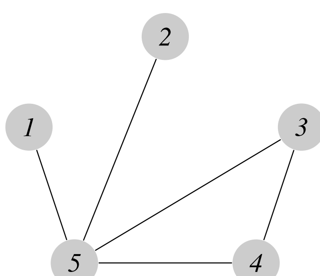
	x	y	z
s_0	b	a	d
s_1	c	b	c
s_2	g	a	g



Ratkaisu: Tulkintafunktiot s_0 ja s_1 toteuttavat $P_1(x)$ koska $s_0(x) = b \in P_1^{\mathcal{M}}$ ja $s_1(x) = c \in P_1^{\mathcal{M}}$, mutta tulkintafunktio s_2 ei toteuta kaavaa koska $s_2(x) = g \notin P_1^{\mathcal{M}}$. □

Tehtävä 149 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan xEy seuraavassa verkossa?*

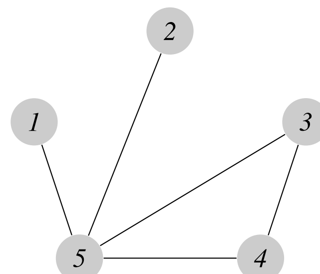
	x	y	z
s_0	4	5	1
s_1	1	1	3
s_2	1	2	4



Ratkaisu: Tulkintafunktio s_0 toteuttaa kaavan xEy koska $s_0(x) = 4$, $s_0(y) = 5$ ja 4 ja 5 ovat verkossa tosiaan naapureita. Tulkintafunktio s_1 ei toteuta kaavaa xEy koska $s_1(x) = 1$, $s_1(y) = 1$ ja missään verkossa solmu ei voi olla itsensä naapuri. Tulkintafunktio s_2 ei toteuta kaavaa xEy koska $s_2(x) = 1$, $s_2(y) = 2$ ja tässä kyseisessä verkossa 1 ja 2 eivät ole naapureita. □

Tehtävä 150 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan zEy seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	1	1
s_1	1	5	3
s_2	1	2	4



Ratkaisu: Tulkintafunktio s_0 ei toteuta kaavaa xEy koska $s_0(z) = s_1(y) = 1$ ja missään verkossa solmu ei voi olla itsensä naapuri. Tulkintafunktio s_1 toteuttaa kaavan xEy koska $s_1(z) = 3$, $s_1(y) = 5$ ja 3 ja 5 ovat verkossa tosiaan naapureita. Tulkintafunktio s_2 ei toteuta kaavaa xEy koska $s_2(z) = 4$, $s_2(y) = 2$ ja tässä kyseisessä verkossa 4 ja 2 eivät ole naapureita. □

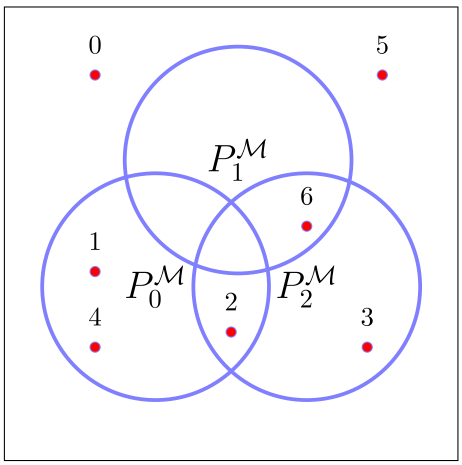
Tehtävä 151 *Anna kussakin tapauksessa yksi unaarinen struktuuri ja kaksi tulkintafunktiota: yksi joka toteuttaa annetun kaavan ja toinen joka ei toteuta annettua kaavaa.*

1. $P_0(x)$
2. $P_1(y)$
3. $P_1(z)$
4. $P_2(x)$

Ratkaisu:

	x	y	z	Toteuttaa
s_1	1	1	1	$P_0(x)$
s_2	6	6	6	$P_1(y)$
s_3	6	6	6	$P_1(z)$
s_4	3	3	3	$P_2(x)$

	x	y	z	Ei Toteuta
s_1	6	6	6	$P_0(x)$
s_2	3	3	3	$P_1(y)$
s_3	2	2	2	$P_1(z)$
s_4	1	1	1	$P_2(x)$

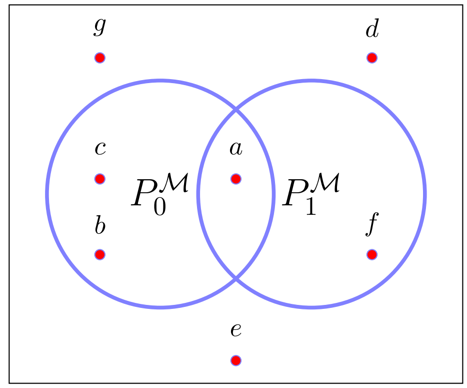


□

2.4.6 Tehtävät

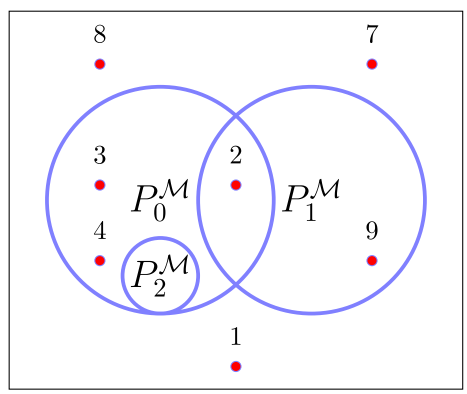
Tehtävä 152 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat atomikaavan $P_1(y)$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	b	a	d
s_1	c	b	c
s_2	g	g	g



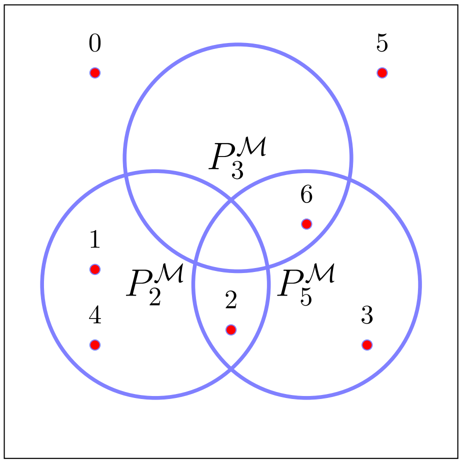
Tehtävä 153 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat atomikaavan $P_0(z)$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	4	2	7
s_1	3	2	3
s_2	8	8	8



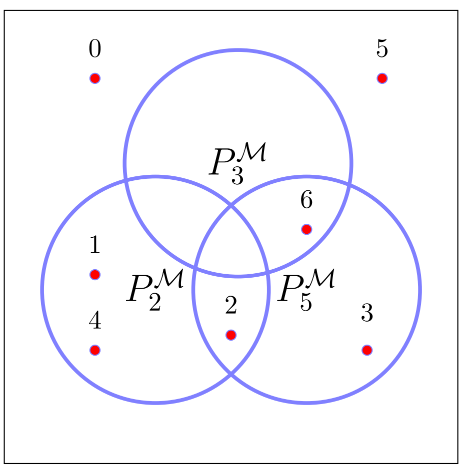
Tehtävä 154 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat atomikaavan $P_5(y)$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	1	2	5
s_1	1	6	0
s_2	1	4	6



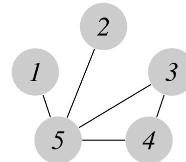
Tehtävä 155 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat atomikaavan $P_2(x)$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	1	2	5
s_1	2	6	0
s_2	3	4	6



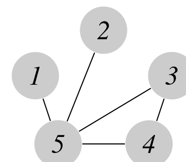
Tehtävä 156 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan xEy seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	4	1	1
s_1	3	5	3
s_2	2	2	4



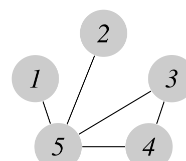
Tehtävä 157 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan xEz seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	2	1
s_1	1	2	3
s_2	1	2	4



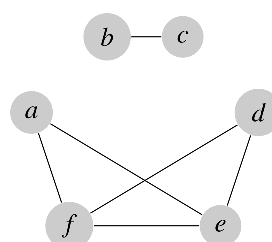
Tehtävä 158 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan zEz seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	1	1
s_1	1	5	3
s_2	1	2	4



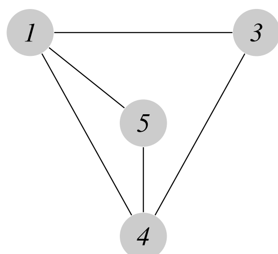
Tehtävä 159 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan xEz seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	a	b	c
s_1	a	d	d
s_2	f	c	e



Tehtävä 160 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan xEy seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	3	3
s_2	3	5	4



Tehtävä 161 *Anna kussakin tapauksessa kaksi laattamallia ja tulkintafunktiota. Yksi joka toteuttaa kaavan ja toinen joka ei toteuta.*

1. $R(x)$
2. $B(y)$
3. $y < x$
4. $x < y$
5. $Y(z)$

Tehtävä 162 *Anna kussakin tapauksesa laattamalli ja tulkintafunktio siten, että ne toteuttavat ensimmäisen kaavan, muttei toista.*

1. $R(x), B(y)$
2. $B(y), x < y$
3. $y < x, R(y)$
4. $x < y, B(y)$
5. $z < x, z < y$

Tehtävä 163 *Anna kussakin tapauksessa unaarinen struktuuri ja tulkintafunktio siten, että ne toteuttavat ensimmäisen kaavan, muttei toista.*

1. $P_0(x), P_1(x)$
2. $P_1(y), P_0(x)$
3. $P_1(y), P_0(y)$
4. $P_2(x), P_0(z)$

Tehtävä 164 *Anna verkko ja tulkintafunktio, joka toteuttaa kaikki kaavat vasemmassa sarakkeessa, muttei yhtään kaavaa oikeassa sarakkeessa.*

xEy	yEu
$z = w$	$x = y$
yEz	zEu
xEu	wEu

2.5 Kaavat

Predikaattilogiikan kaavat ovat lausekkeita jotka on rakennettu yhdistämällä atomilauseita tutuilla konnektiiveilla, mutta myös kvanttoreilla kuten "on olemassa" tai "kaikilla". Huomaamme, että kvanttorit ovat jotain mitä propositiologiikan kielessä ei ollut. Predikaattilogiikan avulla pystymme sanomaan enemmän kuin propositiologiikalla, mutta pitää myös muistaa, että predikaattilogiikan kieli on vartavasti monimutkaisempi kuin propositiologiikan.

2.5.1 Predikaattilogiikan kaavat

Tässä on määritelmä predikaattilogiikan kaavoille:

Määritelmä 2.6 *Predikaattilogiikan, eli ensimmäisen kertaluvun logiikan,* kaavat *on rakennettu yhdistämällä atomikaavoja loogisilla operaatioilla:*

Negaatio	$\neg A$	
Konjunktio	$A \wedge B$	
Disjunktio	$A \vee B$	
Implikaatio	$A \rightarrow B$	
Ekvivalenssi	$A \leftrightarrow B$	
Eksistenssikvanttori	$\exists x A,$	*x on muuttuja*
Universaalikvanttori	$\forall x A,$	*x on muuttuja.*

Sulkumerkkejä (,) käytetään selkeyden vuoksi.

Esimerkiksi, atomikaavoista xEy ja $x = z$ voimme muodostaa seuraavat kaavat:

- $xEy \wedge x = z$
- $xEy \wedge \neg x = z$
- $\exists x(xEy \wedge \neg x = z)$
- $\forall y \exists x(xEy \wedge \neg x = z)$
- $\exists x(xEy \wedge x = z) \wedge \exists x(xEy \wedge \neg x = z)$
- $\forall y(\exists x(xEy \wedge x = z) \wedge \exists x(xEy \wedge \neg x = z))$

Kaikilla predikaattilogiikan kaavoilla, kuten yllä näkyvillä esimerkeillä, on intuitiivinen merkitys heti kun struktuuri ja sen universumi on annettu ja tiedämme mitä itse symbolit, kuten E kaavassa xEy, tarkoittavat. Meidän pitää myös päättää millä tulkintafunktiolla annamme arvoja muuttujille. Tällöin kaavan intuitiivinen merkitys on:

Kaava	Merkitys
$\neg A$	ei A
$A \wedge B$	A ja B
$A \vee B$	A tai B
$A \rightarrow B$	jos A, niin B
$A \leftrightarrow B$	A jos ja vain jos B
$\exists x A$	A pätee joillekin x:n arvoille
$\forall x A$	A pätee kaikille x:n arvoille.

Tulkintafunktion tarkoitus on määritellä käsite "x:n arvon" yllä mainituissa kaavoissa tarkasti ja matemaattisesti.

2.5.2 Disjunktio, konjunktio

Disjunktio ja konjunktio ymmärretään predikaattilogiikassa aivan kuten propositiologiikassa:

Määritelmä 2.7 *Tulkintafunktio s toteuttaa $A \vee B$:n M:ssä jos ja vain jos s toteuttaa A:n tai B:n M:ssä.*

Toisin sanoen, jotta voidaan päätyä tulokseen, että s toteuttaa $A \vee B$:n niin meidän täytyy pystyä osoittamaan, että s toteuttaa joko A:n tai B:n M:ssä, ei välttämättä molempia.

Määritelmä 2.8 *Tulkintafunktio s toteuttaa $A \wedge B$:n jos ja vain jos se toteuttaa sekä A:n että B:n M:ssä.*

Toisin sanoen, jotta voidaan päätyä tulokseen, että s toteuttaa $A \wedge B$:n niin meidän täytyy pystyä osoittamaan, että s toteuttaa sekä A:n *että* B:n M:ssä.

2.5.3 Negaatio

Negaatio – kieltäminen– tulkitaan predikaattilogiikassa samalla tavalla kuin propositiologiikassa.

Määritelmä 2.9 *Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\neg A$ $\mathcal{M}$:ssä jos ja vain jos s ei toteutta A:ta $\mathcal{M}$:ssä.*

Tämä on helppo tapaus: jotta voimme osoittaa, että s toteuttaa $\neg A$:n $\mathcal{M}$:ssä niin meidän täytyy vain osoittaa, että on mahdotonta, että s toteuttaa A:n $\mathcal{M}$:ssä. Samoin, jos tiedämme, että s toteuttaa $\neg A$:n $\mathcal{M}$:ssä, niin tiedämme varmasti, että se ei toteutta A:ta.

2.5.4 Implikaatio ja ekvivalenssi

Tulkitsemme implikaation samalla tavalla kuin propositiologiikassa. Implikaatio on täsmälleen juuri silloin kun sen hypoteesi on epätosi tai sen päättely on tosi. Mitä sanoimme aikaisemmin siitä, että näiden sääntöjen ansiosta logiikka sallii todeksi myös hyvin epäintuitiivisia lauseita, on tietenkin edelleen totta.

Määritelmä 2.10 *Tulkintafunktio s toteuttaa $A \rightarrow B$:n $\mathcal{M}$:ssä jos ja vain jos s ei toteuta A:ta $\mathcal{M}$:ssä tai toteuttaa B:n $\mathcal{M}$:ssä.*

Jotta voimme osoittaa, että s toteuttaa $A \rightarrow B$:n $\mathcal{M}$:ssä oletamme, että s toteuttaa A:n $\mathcal{M}$:ssä ja yritämme tästä johtaa, että se myös toteuttaa B:n. Jos tiedämme, että s toteuttaa $A \rightarrow B$:n, niin meidän täytyy miettiä kahta vaihtoehtoa: Ensimmäisessä s ei toteuttaa A:ta, ja toisessa s toteuttaa B:n. Tyypillisessä tilanteessa tiedämme, että s toteuttaa $A \rightarrow B$:n M:ssä ja, että s toteuttaa A:n, jolloin voimme päätellä, että s toteuttaa myös B:n.

Määritelmä 2.11 *Tulkintafunktio s toteuttaa $A \leftrightarrow B$:n M:ssä jos ja vain jos s toteuttaa sekä A:n että B:n M:ssä tai ei kumpaakaan.*

Hieman paradoksaalisesti tämän on helpompi tapaus kuin implikaatio. Jotta voidaan asettaa, että s toteuttaa $A \leftrightarrow B$:n $\mathcal{M}$:ssä niin oletetaan, että s toteuttaa A:n ja yritetään todistaa, että se toteuttaa myös B:n. Tämän jälkeen sama prosessi tehdään toisin päin. Jos tiedämme, että s toteuttaa $A \leftrightarrow B$:n $\mathcal{M}$:ssä ja tiedämme, että se toteuttaa joko A:n tai B:n niin tiedämme, että se myös toteuttaa toisenkin.

Kaavat	$x = y, c = x, x = c, c = d$
Relaatio	$P_n(x), P_n(c), R_n(x, y),$
	$R_n(c, x), R_n(x, c), R_n(c, d)$
Negaatio	$\neg A$
Konjunktio	$A \wedge B$
Disjunktio	$A \vee B$
Implikaatio	$A \rightarrow B$
Ekvivalenssi	$A \leftrightarrow B$
Eksistenssikvanttori	$\exists x A$
Universaalikvanttori	$\forall x A$

Kuva 2.2: Kaavat

2.5.5 Toteutus

Olemme määritelleet milloin tulkintafunktio s toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$. Merkitsemme sen seuraavasti:

$$M \models_s A.$$

Tällä merkintätavalla voimme kirjoittaa yllä mainitut käsitteet seuraavasti:

Määritelmä 2.12 *A:n toteutus tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$, symboleina $M \models_s A$, on määritelty seuraavasti silloin kun A ei sisällä kvanttoreita:*

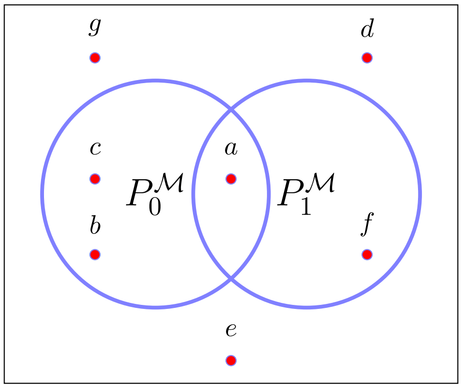
1. *$\mathcal{M} \models_s x = y$ jos ja vain jos $s(x) = s(y)$.*
2. *$\mathcal{M} \models_s P_n(x)$ jos ja vain jos $s(x)$ on joukossa $P_n^{\mathcal{M}}$.*
3. *$\mathcal{M} \models_s R(x, y)$ jos ja vain jos $(s(x), s(y))$ on relaatiossa $R^{\mathcal{M}}$, eli $s(x)R^{\mathcal{M}}s(y)$.*
4. *$\mathcal{M} \models_s A \vee B$ jos ja vain jos ($\mathcal{M} \models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$).*
5. *$\mathcal{M} \models_s A \wedge B$ jos ja vain jos ($\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$).*
6. *$\mathcal{M} \models_s \neg A$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \not\models_s A$.*
7. *$\mathcal{M} \models_s A \rightarrow B$ jos ja vain jos ($\mathcal{M} \not\models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$).*
8. *$\mathcal{M} \models_s A \leftrightarrow B$ jos ja vain jos [($\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$) tai ($\mathcal{M} \not\models_s A$ ja $\mathcal{M} \not\models_s B$)].*

Huomaa, että Määritelmä 2.12 on induktiivinen määritelmä siinä mielessä, että $\mathcal{M} \models_s A$ on määritelty induktiolla $\mathcal{M} \models_s B$ alikaavojen B suhteen. Tämä vastaa, vaikkakin on monimutkaisempi, induktiota Fibonaccin lukujonoissa $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, missä a_{n+2} on määritelty suhteessa pienempiin lukuihin a_n ja a_{n+1}.

2.5.6 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 165 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $P_0(x) \vee P_1(y)$ seuraavassa unaaristruktuurissa?*

	x	y	z
s_0	b	a	d
s_1	c	b	c
s_2	g	g	g

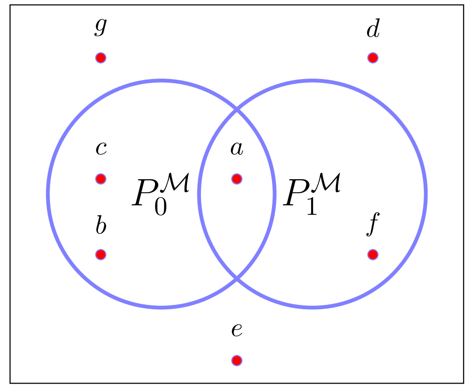


Ratkaisu: Heti huomaa, että s_0 toteuttaa kyseisen kaavan sillä s_0 antaa arvon b muuttujalle x struktuurissa $P_0^{\mathcal{M}}$. s_1 myös toteuttaa kyseisen kaavan koska se antaa arvon c muuttujalle x struktuurissa $P_0^{\mathcal{M}}$. Toisaalta s_2 ei toteuta kyseistä kaavaa, koska se antaa muuttujille x ja y arvon g mikä ei kuulu joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$ tai joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$.

Katsokaamme nyt itse tulkintafunktioita. s_0:n arvo x:ssä on b ja $b \in P_0^{\mathcal{M}}$ joten $\mathcal{M} \models_{s_0} P_0(x) \vee P_1(y)$. s_1:n arvo x:ssä taas on c ja $c \in P_0^{\mathcal{M}}$ joten $\mathcal{M} \models_{s_0} P_0(x) \vee P_1(y)$. Lopulta $s_2(x) = g$ ja $g \notin P_0^{\mathcal{M}}$ joten emme voi vielä johtaa, että $\mathcal{M} \models_{s_0} P_0(x) \vee P_1(y)$. Meidän täytyy myös tarkistaa $s_2(y) = g$, mutta tässäkin tapauksessa $g \notin P_1^{\mathcal{M}}$. Joten lopulta voimme johtaa, että $\mathcal{M} \not\models_{s_0} P_0(x) \vee P_1(y)$. Eli vastaus on, että s_0 ja s_1 toteuttavat, mutta s_2 ei toteuta. □

Tehtävä 166 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $P_1(y) \rightarrow (P_0(x) \rightarrow P_1(z))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	a	c
s_2	e	e	e



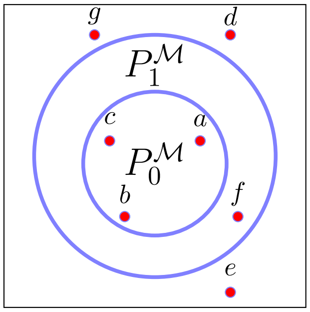
Ratkaisu: Heti huomaa, että tulkintafunktiot s_0 ja s_2 toteuttavat implikaation koska kumpikaan ei toteuta implikaation hypoteesia, eli kaavaa $P_1^{\mathcal{M}}$. Tulkintafunktio s_1 taas toteuttaa implikaation hypoteesin, eli kaavaa $P_1^{\mathcal{M}}$.Tästä huolimatta se ei toteuta implikaatiota itsessään koska se ei toteuta implikaation johtopäätöstä.

Katsokaamme nyt tulkintafunktioita. Alkio $s_0(y)$ on c ja $c \notin P_1^{\mathcal{M}}$. Eli $\mathcal{M} \not\models_{s_0} P_1(y)$ ja tästä johtuen s_0 toteuttaa kaavan. Alkio $s_1(y)$ on a ja $a \in P_1^{\mathcal{M}}$ joten jatkamme. Alkio $s_1(x)$ on myös a ja $a \in P_0^{\mathcal{M}}$ joten jatkamme. Alkio $s_1(z)$ on c ja $c \notin P_1^{\mathcal{M}}$. Tästä voimme päätellä, että $\mathcal{M} \not\models_{s_1} P_0(x) \rightarrow P_1(z)$ vaikka $\mathcal{M} \models_{s_1} P_1(y)$. Joten johtopäätös on, että s_1 ei toteuta kaavaa.

Lopulta $s_2(y) = e$ ja $e \notin P_1^{\mathcal{M}}$, eli $\mathcal{M} \not\models_{s_2} P_1(y)$ ja tästä johtuen s_2 toteuttaa kaavan. □

Tehtävä 167 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $P_1(y) \vee (P_0(z) \wedge P_1(x))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

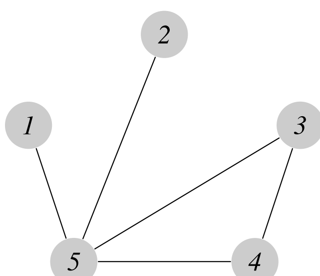
	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	e	c
s_2	f	e	f



Ratkaisu: Katsokaamme tulkintafunktioita. Alkio $s_0(y)$ on c ja $c \in P_1^{\mathcal{M}}$, joten s_0 toteuttaa kaavan. Alkio $s_1(y)$ on e ja $e \notin P_1^{\mathcal{M}}$, joten jatkamme. Alkio $s_1(z)$ on a ja $a \in P_1^{\mathcal{M}}$, joten s_1 toteuttaa kaavan. Lopulta alkio $s_2(y)$ on e ja $e \notin P_1^{\mathcal{M}}$, joten jatkamme. Alkio $s_2(z)$ on f ja $f \notin P_0^{\mathcal{M}}$, joten s_2 ei toteuta kaavaa. □

Tehtävä 168 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $xEy \wedge yEz$ seuraavassa verkossa?*

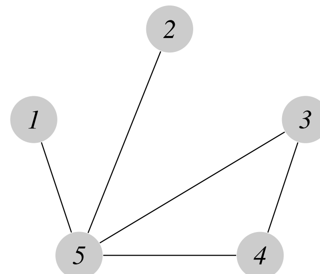
	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	1	3
s_2	1	2	4



Ratkaisu: Katsokaamme tulkintafunktioita. Alkio $s_0(x)$ on 1 ja $s_0(y)$:n arvo on 5. Eli meillä on $1E^{\mathcal{M}}5$, joten s_0 toteuttaa kaavan xEy. Alkio $s_0(z)$ on 1, joten s_0 toteuttaa kaavan yEz, ja täten myös kyseessä olevan kaavan. Nyt $s_1(x) = 1$ ja $s_1(y) = 1$, mutta $(1,1) \notin E^{\mathcal{M}}$, joten s_1 toteuttaa kaavan. Lopulta $s_2(y) = e$ ja $e \notin P_1^{\mathcal{M}}$ joten jatkamme. Nyt $s_2(z) = f$ ja $f \notin P_0^{\mathcal{M}}$. Joten s_2 ei toteuta kaavaa. □

Tehtävä 169 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttaa kaavan $xEy \rightarrow xEz$ seuraavassa verkossa?*

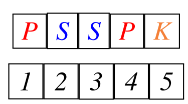
	x	y	z
s_0	1	5	2
s_1	1	1	3
s_2	1	2	4



Ratkaisu: Tulkintafunktio s_0 toteuttaa kaavan xEz, mutta tämän takia se ei toteuta implikaatiota $xEy \rightarrow xEz$. Tulkintafunktio s_1 toisaalta ei toteuta lausetta xEy ja täten toteuttaa implikaation. Sama tapahtuu tulkintafunktion s_2 kohdalla. □

Tehtävä 170 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $R(x) \vee B(y)$ seuraavassa laattamallissa? Jotta voimme viitata yksittäisiin laattoihin annamme niille nimet.*

	x	y	z
s_0	1	5	2
s_1	2	1	3
s_2	2	2	4

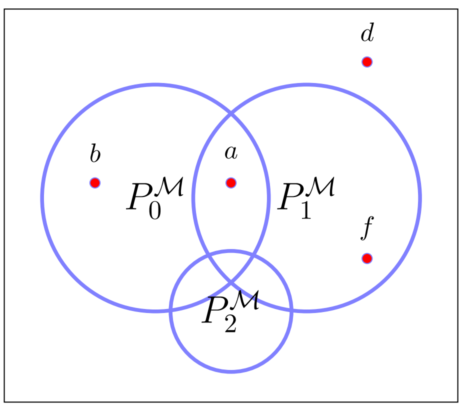


Ratkaisu: Intuitiivisesti kysymys on "Onko x punainen tai y sininen?", joten katsokaamme mitä tulkintafunktiot sanovat muuttujista x ja y. Tulkintafunktion s_0:n mukaan x:llä on arvo 1 eli $s_0(x) = 1$. 1 on punainen joten s_0 ei toteuta kaavaa. Tulkintafunktion s_1:n mukaan x:llä on arvo 2 eli x ei ole punainen ja y:llä on arvo 1 eli y ei ole sininen. Joten s_1 ei toteuta kaavaa. Lopulta tulkintafunktion s_2:n mukaan x:llä on arvo 2 eli x ei ole punainen, mutta y:llä on myös arvo 2 eli y *on* sininen. Joten s_2 toteuttaa kaavan. □

Tehtävä 171 *Keksi kussakin tapauksessa unaarinen struktuuri ja tulkintafunktio, joka toteuttaa annetun kaavan keksimässäsi struktuurissa.*

1. $P_0(x) \wedge \neg P_1(x)$
2. $\neg(P_0(x) \vee \neg P_1(x))$
3. $P_0(x) \to (P_1(x) \vee P_2(x))$
4. $P_0(x) \vee \neg P_1(x) \vee P_2(x)$

Ratkaisu: Käytämme samaa mallia kussakin tapauksessa:

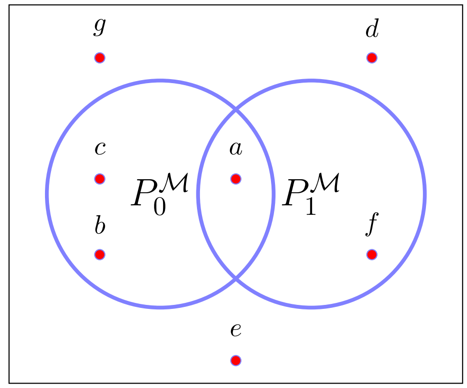


Ensimmäisessä tapauksessa riittää, että $s(x) = b$. Toisessa tapauksessa annamme $s(x) = f$. Kolmannessa tapauksessa voimme myös antaa $s(x) = f$. Lopulta neljännessä tapauksessa annamme $s(x) = b$. □

2.5.7 Tehtävät

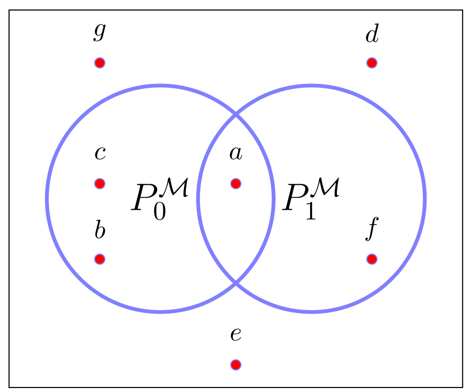
Tehtävä 172 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $\neg P_0(x) \wedge P_1(y)$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	b	c
s_2	e	f	a



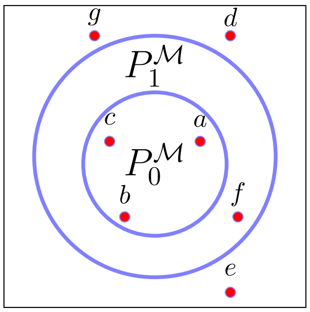
Tehtävä 173 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $P_1(z) \to (\neg P_0(x) \to P_1(x))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	a	f
s_2	e	e	a



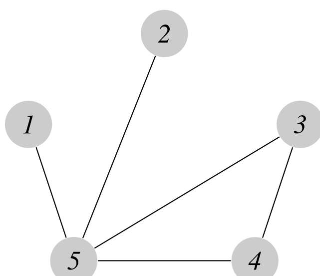
Tehtävä 174 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $P_1(z) \to (P_0(y) \to P_1(x))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	g	a	c
s_2	e	e	a



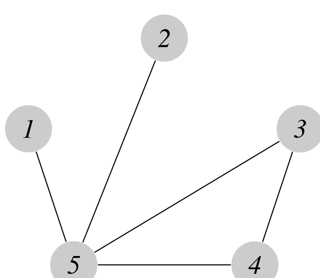
Tehtävä 175 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $xEy \to yEz$ seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	1	3
s_2	3	4	2



Tehtävä 176 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $xEy \vee xEz$ seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	2	3
s_2	5	2	4



Tehtävä 177 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $R(x) \to x < y$ seuraavassa laattamallissa? Jotta voimme viitata yksittäisiin laattoihin olemme antaneet niille nimet* $1, 2, 3, 4, 5$.

	x	y	z
s_0	1	5	2
s_1	2	1	3
s_2	4	2	4

R	*B*	*B*	*R*	*Y*
1	*2*	*3*	*4*	*5*

Tehtävä 178 *Luo kussakin tapauksessa laattamalli ja tulkintafunktio joka toteuttaa annetun kaavan:*

1. $R(x) \wedge \neg B(x)$
2. $\neg(R(x) \wedge \neg B(x))$
3. $B(x) \to (R(y) \wedge y < x)$
4. $\neg(B(x) \to (R(y) \wedge y < x))$
5. $\neg((B(x) \wedge Y(y) \wedge x < y) \vee (B(x) \wedge Y(y) \wedge y < x))$

2.6 Kvanttorit

2.6.1 Johdanto

Kvanttorit ovat viimeinen askel matkallamme ymmärtämään, miten predikaattilogiikan lauseet ja kaavat koostuvat. Kvanttoreiden avulla voimme helposti kuvailla runsaasti ilmiöitä ympärillämme, tietokoneissa ja matematiikassa. Kuuluisa esimerkki kvanttoreiden käytöstä on $\epsilon - \delta$ määritelmä jatkuvuudelle[1].

2.6.2 Predikaattilogiikan kaavat

Muistakaamme, että predikaattilogiikan kaavat ovat seuraavaa muotoa:

- atomikaava, eli $x = y$, $P_n(x)$, $R(x, y)$

[1] Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* pisteessä x_0 jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, siten, että $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ pätee kaikilla x:n arvoilla, joilla $|x - x_0| < \delta$.

- $\neg A$
- $A \wedge B$
- $A \vee B$
- $A \rightarrow B$
- $A \leftrightarrow B$
- $\forall x A$
- $\exists x A$,

missä A ja B ovat predikaattilogiikan kaavoja. Sulkumerkkejä (,) käytetään selkeyden vuoksi, juuri kuten propositiologiikassa. Täten, jos haluamme laittaa universaalikvanttorin $A \rightarrow B$:n eteen, niin kirjoitamme $\forall x(A \rightarrow B)$.

Esimerkki 2.13
- $P_0(x) \rightarrow P_1(x)$
- $\neg(x < y \vee y < x)$
- $\exists x(xEy \wedge \exists z(xEz \wedge \neg zEy))$
- $\forall x(B(x) \rightarrow \exists z(Y(z) \wedge z < x))$

2.6.3 Universaalikvanttorin selitys

Intuitiivisesti $\forall x A$ tarkoittaa sitä, että *kaikki* x:n arvot toteuttavat A:n, eli:

- Kaikki laatat ovat punaisia.
- Kaikki x:n arvot toteuttavat $x^2 \geq 0$.
- Kaikki solmut x ja y ovat naapureita.
- Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.
- Kaikki rakastavat häntä.

2.6.4 Eksistentiaalikvanttorin selitys

Intuitiivisesti $\exists x A$ tarkoittaa sitä, että *jotkut* x:n arvot toteuttavat A:n, eli:

- Jotkut laatat ovat punaisia.
- Jotkut x:n arvot toteuttavat $x^2 = 2$.
- Jotkut solmut x ja y ovat naapureita.
- On olemassa keltainen laatta.
- On olemassa solmu jolla on kaksi naapuria.

2.6.5 Tulkintafunktiot ja kvanttorit

Jotta voimme *määritellä* milloin tulkintafunktio toteuttaa kvantifioidun kaavan, tarvitsemme *modifioidun tulkintafunktion* käsitteen. Mistä tahansa tulkintafunktiosta s, muuttujasta x ja alkiosta a mallimme universumista voimme muodostaa *modifioidun* tulkintafunktion $s(a/x)$ seuraavasti:

	x	y	z	
s	1	5	1	
$s(2/x)$	2	5	1	Modifioitu tulkintafunktio.
$s(8/z)$	1	5	8	Toinen modifioitu tulkintafunktio.

Tulkintakaava $s(a/x)$ on aivan samanlainen kuin tulkintafunktio s paitsi, että x:n arvo on muuttunut a:ksi.

2.6.6 Kvantifioidun kaavan toteuttaminen tulkintafunktiolla

Voimme nyt määritellä kaavan toteuttamisen kasitteen myös kvantifioiduille kaavoille:

Määritelmä 2.14
- *Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\forall x A$ $\mathcal{M}$:ssä jos modifioitu tulkintafunktio $s(a/x)$ toteuttaa A:n $\mathcal{M}$:ssä jokaiselle a:lle M:ssä.*
- *Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\exists x A$ $\mathcal{M}$:ssä jos modifioitu tulkintafunktio $s(a/x)$ toteuttaa A:n $\mathcal{M}$:ssä jollekin a:lle M:ssä.*

2.6.7 Tarskin totuusmääritelmä

Olemme nyt määritelleet yleisesti milloin tulkintafunktio s toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$. Kun näin on, kirjoitamme $\mathcal{M} \models_s A$.

Tällä merkintätavalla voimme kirjoittaa yllä mainitut määritelmät seuraavasti:

Määritelmä 2.15 *A:n toteutus tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$, symboleina $M \models_s A$, on määritelty kuten kuvassa 2.3.*

Huomaa, että Kuva 2.3 on induktiivinen määritelmä siinä mielessä että $\mathcal{M} \models_s A$ on määritelty käsitteen $\mathcal{M} \models_{s'} B$ avulla, missä B on A:n alikaava ja s' on modifikaatio s:stä.

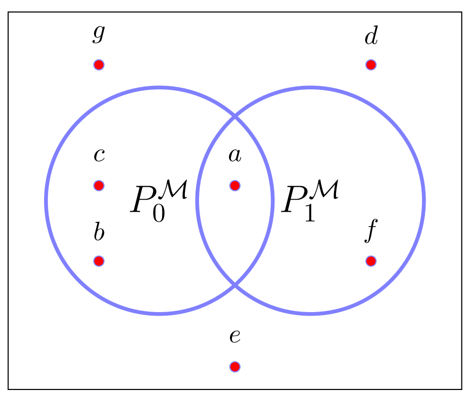
Tätä kutsutaan Tarskin totuusmääritelmäksi.

Yhtälöt	$\mathcal{M} \models_s x = y$ $\mathcal{M} \models_s c = y$ $\mathcal{M} \models_s c = d$	jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos	$s(x) = s(y)$ $c^{\mathcal{M}} = s(y)$, vastaavasti $x = d$ $c^{\mathcal{M}} = d^{\mathcal{M}}$
Relaatiot	$\mathcal{M} \models_s P_n(x)$ $\mathcal{M} \models_s P_n(c)$ $\mathcal{M} \models_s R(x,y)$ $\mathcal{M} \models_s R(c,y)$ $\mathcal{M} \models_s R(c,d)$	jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos	$s(x) \in P_n^{\mathcal{M}}$ $c^{\mathcal{M}} \in P_n^{\mathcal{M}}$ $(s(x), s(y)) \in R^{\mathcal{M}}$. $(c^{\mathcal{M}}, s(y)) \in R^{\mathcal{M}}$, vastaavasti $R(x,d)$. $(c^{\mathcal{M}}, d^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$.
Konnektiivit	$\mathcal{M} \models_s A \vee B$ $\mathcal{M} \models_s A \wedge B$ $\mathcal{M} \models_s \neg A$ $\mathcal{M} \models_s A \to B$ $\mathcal{M} \models_s A \leftrightarrow B$	jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos jos ja vain jos	$\mathcal{M} \models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$. $\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$. $\mathcal{M} \not\models_s A$. $\mathcal{M} \not\models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$. $(\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B)$ tai $(\mathcal{M} \not\models_s A$ ja $\mathcal{M} \not\models_s B)$
Kvanttorit	$\mathcal{M} \models_s \forall x A$ $\mathcal{M} \models_s \exists x A$	jos ja vain jos jos ja vain jos	$\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ kaikille $a \in M$ $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ joillekkin $a \in M$

Kuva 2.3: Tarskin totuusmääritelmä

2.6.8 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 179 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $\exists y(P_0(x) \wedge P_1(y))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*



	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	b	c
s_2	e	e	a

Ratkaisu: Näyttäkäämme ensin, että s_0 toteuttaa annetun kaavan $\mathcal{M}$. Muokattu tulkintafunktio $s_0(f/y)$ toteuttaa $P_1(y)$:n tässä mallissa koska $f \in P_1^{\mathcal{M}}$. Tulkintafunktio $s_0(f/y)$ myös toteuttaa $P_0(x)$:n tässä mallissa koska $s_0(f/y)(x) = c \in P_0^{\mathcal{M}}$. Siis $s_0(f/y)$ toteuttaa lauseen $P_0(x) \wedge P_1(y)$ mallissa $\mathcal{M}$. Täten s_0 toteuttaa lauseen $\exists y(P_0(x) \wedge P_1(y))$ mallissa $\mathcal{M}$.

Seuraavaksi näyttämme, että s_1 toteuttaa myös annetun kaavan mallissa $\mathcal{M}$, Olemme jo nähneet, että $s_1(f/y)$ toteuttaa $P_1(y)$:n mallissa $\mathcal{M}$. Tulkintafunktio $s_1(f/y)$ toteuttaa myös $P_0(x)$:n tässä mallissa koska $s_1(f/y)(x) = a \in P_0^{\mathcal{M}}$. Täten s_1 toteuttaa lauseen $\exists y(P_0(x) \wedge P_1(y))$ mallissa $\mathcal{M}$.

Näyttäkäämme lopuksi, että s_2 ei toteuta annettua kaavaa mallissa $\mathcal{M}$. Minkä tahansa alkion h valitsemmekin niin muokattu tulkintafunktio $s_2(h/y)$ ei toteuta $P_0(x)$:ää tässä mallissa, koska $s_2(h/y)(x) = e \notin P_0^{\mathcal{M}}$. Siis $s_2(h/y)$ ei toteuta lausetta $P_0(x) \wedge P_1(y)$ mallissa $\mathcal{M}$, olipa h mikä tahansa alkio. Täten s_2 ei toteuta lausetta $\exists y(P_0(x) \wedge P_1(y))$ mallissa $\mathcal{M}$.

Siis ratkaisu on, että ensimmäiset kaksi tulkintafunktiota toteuttavat kaavan mallissa $\mathcal{M}$, mutta viimeinen ei.

Voimme kirjoittaa koko ratkaisun käyttämällä $\mathcal{M} \models_s A$ merkintätapaa:

Näyttäkäämme ensin, että

$$\mathcal{M} \models_{s_0} \exists y(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Huomaa, että

$$\mathcal{M} \models_{s_0(f/y)} P_1(y)$$

koska $f \in P_1^{\mathcal{M}}$. Huomaa myös, että

$$\mathcal{M} \models_{s_0(f/y)} P_0(x),$$

koska $s_0(f/y)(x) = c \in P_0^{\mathcal{M}}$. Joten

$$\mathcal{M} \models_{s_0(f/y)} P_0(x) \wedge P_1(y).$$

Täten

$$\mathcal{M} \models_{s_0} \exists y(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Seuraavaksi näytämme, että

$$\mathcal{M} \models_{s_1} \exists y(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Olemme jo näyttäneet, että

$$\mathcal{M} \models_{s_1(f/y)} P_1(y).$$

Huomaa myös, että

$$\mathcal{M} \models_{s_1(f/y)} P_0(x),$$

koska $s_1(f/y)(x) = a \in P_0^{\mathcal{M}}$. Täten

$$\mathcal{M} \models_{s_1} \exists y(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Näyttäkäämme viimeiseksi, että

$$\mathcal{M} \models_{s_2} \exists y(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Oli alkio h mikä tahansa niin

$$\mathcal{M} \not\models_{s_2(h/y)} P_0(x),$$

koska $s_2(h/y)(x) = e \notin P_0^{\mathcal{M}}$. Siis

$$\mathcal{M} \not\models_{s_2(h/y)} P_0(x) \wedge P_1(y),$$

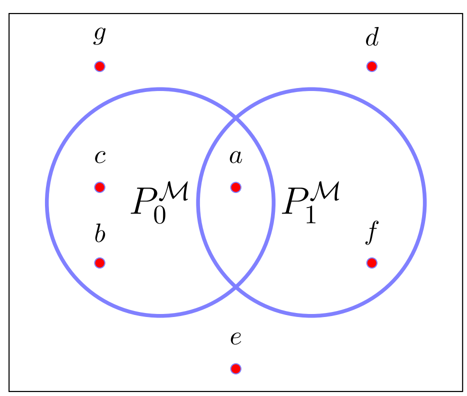
mikä tahansa alkio h onkaan. Täten

$$\mathcal{M} \not\models_{s_2} \exists y(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Siis ratkaisu on, että ensimmäiset kaksi tulkintafunktiota toteuttavat kaavan mallissa $\mathcal{M}$, mutta viimeinen ei. □

Tehtävä 180 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $P_1(y) \to \forall x(P_0(x) \to P_1(x))$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

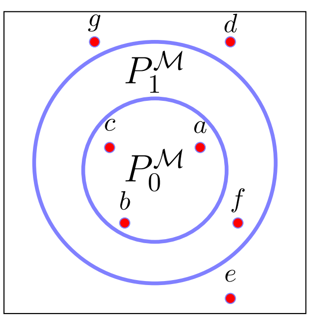
	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	a	c
s_2	e	e	a



Ratkaisu: Kaava, jota tutkimme on implikaatio. Implikaatio pätee aina kun hypoteesi ei päde. Muuttujan y arvo s_0:ssa ja s_2:ssa ei kuulu joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Siis kumpikaan s_0:sta ja s_2:sta ei toteuta $P_1(y)$:tä mallissa $\mathcal{M}$. Siis ne molemmat toteuttavat annetun kaavan. Nyt meille jää jäljelle s_1. Tässä tapauksessa $s_1(y) = a \in P_1^{\mathcal{M}}$ joten implikaation hypoteesi pätee. Tämän takia joudumme harkitsemaan implikaation johtopäätöstä. Johtopäätös intuitiivisesti tarkoittaa, että $P_0^{\mathcal{M}}$ sisältyy joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Tämä ei ilmiselvästi päde, katsokaamme miksi. Esimerkiksi c kuuluu joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$, muttei joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$, joten $s_1(c/x)$ ei toteuta lausetta $P_0(x) \to P_1(x)$. Täten s_1 ei toteuta lausetta $\forall x(P_0(x) \to P_1(x))$ ja täten s_1 ei toteuta annettua lausetta. □

Tehtävä 181 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $P_1(y) \to \forall x(P_0(z) \to P_1(x))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

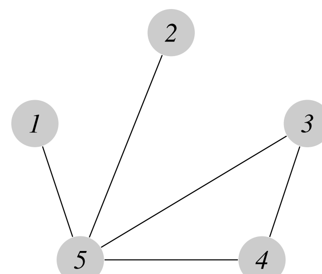
	x	y	z
s_0	c	c	f
s_1	a	a	c
s_2	e	e	a



Ratkaisu: Voimme heti huomata, että s_2 toteuttaa implikaation koska se ei toteuta lauseen hypoteesia: $s_2(y) = e \notin P_1^{\mathcal{M}}$. Implikaation johtopäätös *ei* sano, että $P_0^{\mathcal{M}} \subseteq P_1^{\mathcal{M}}$, vaan jotain aivan muuta. Nimittäin, että jos z kuuluu joukkoon P_0 niin jokainen alkio kuuluu joukkoon P_1. Tulkintafunktiossa s_0 meillä on $s_0(z) = f \notin P_0$. Eli miten tahansa h valitaankin, niin $s_0(h/x)$ ei toteuta $P_0(z)$:aa, joten se *toteuttaa* $P_0(z) \to P_1(x)$:n. Eli s_0 toteuttaa annetun implikaation johtopäätöksen ja täten myös implikaation. Katsokaamme viimein tulkintafunktiota s_1. Katsokaamme ensin alkiota $s_1(g/x)$. Koska $s_1(g/x)(z) = c \in P_0^{\mathcal{M}}$, niin $s_1(g/x)$ toteuttaa implikaation $P_0(z) \to P_1(x)$ hypoteesin, mutta se ei tyyydytä implikaation johtopäätöstä ja täten se ei toteuta itse implikaatiota. Tästä johtuen s_1 ei toteuta lausetta $\forall x(P_0(z) \to P_1(x))$. Koska $s_1(y) = a \in P_0^{\mathcal{M}}$, niin s_1 ei toteuta annettua kaavaa mallissa $\mathcal{M}$. □

Tehtävä 182 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $\exists y(xEy \wedge yEz)$ *seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	1	3
s_2	1	2	4



Ratkaisu: Tämä tapaus on aika helppo. Jokaisessa tapauksessa x:n arvo on 1. Kaava väittää, että joku 1:n naapuri on z:n arvon naapuri. Voimme valita solmun 5, solmun 1 ainoan naapurin kussakin tapauksessa. Siis kaikki kolme tulkintafunktiota toteuttavat kaavan. Tehkäämme tämä hieman tarkemmin käyttäen merkintätapaa $\mathcal{M} \models_s A$. Ensin tulkintafunktio s_0. Tiedämme, että

$$\mathcal{M} \models_{s_0(5/y)} xEy,$$

koska $s_0(x) = 1$:n ja 5:n välissä on reuna. Lisäksi tiedämme, että

$$\mathcal{M} \models_{s_0(5/y)} yEz,$$

koska $s_0(z) = 1$. Siis

$$\mathcal{M} \models_{s_0(5/y)} xEy \wedge yEz,$$

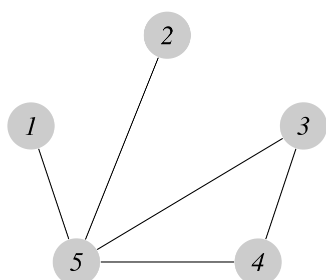
mistä seuraa, että

$$\mathcal{M} \models_{s_0} \exists y(xEy \wedge yEz).$$

Sitten tulkintafunktio s_1. Tulkintafunktio $s_1(5/y)$ toteuttaa lauseen xEy, koska $s_1(x) = 1$:n ja 5:n välissä on olemassa reuna. Lisäksi tiedämme, että $s_1(5/y)$ toteuttaa kaavan yEz, koska $s_1(z) = 3$:n ja 5:n välissä on reuna. Eli loppujen lopuksi tulkintafunktio $s_1(5/y)$ toteuttaa kaavan $xEy \wedge yEz$ ja täten tulkintafunktio s_1 toteuttaa kaavan $\exists y(xEy \wedge yEz)$. Lopulta tulkintafunktio s_2. Todistus on aivan sama, koska $s_2(z) = 4$:n ja 5:n välissä on reuna. □

Tehtävä 183 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat seuraavassa verkossa kaavan $\forall x(x = y \vee xEy)$?*

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	1	3
s_2	1	2	4



Ratkaisu: Kaava tarkoittaa intuitiivisesti, että solmu joka kuvaa muuttujaa y, on jokaisen muun solmun naapuri.Tässä kaavassa vain solmu 5 on jokaisen muun solmun naapuri. Tämä tarkoittaa että vain s_0 toteuttaa kaavan. Tarkemmin sanottuna $s_0(a/x)$ toteuttaa kaavan $x = y \vee xEy$ jokaiselle solmulle a, joten s_0 toteuttaa kaavan. Toisaalta $s_1(2/x)$ tai $s_2(3/x)$ eivät toteuta kaavaa xEy. Lopputulos on, että s_1 ja s_2 eivät toteuta kyseistä kaavaa. □

Tehtävä 184 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $\exists y(R(x) \wedge x < y)$ seuraavassa laattamallissa?*

	x	y	z
s_0	1	5	2
s_1	2	1	3
s_2	4	2	4

R	*B*	*B*	*R*	*Y*
1	*2*	*3*	*4*	*5*

Ratkaisu: Kaava intuitiivisesti tarkoittaa, että laatta joka tulkitsee muuttujaa x on punainen ja sillä on laatta oikealla puolellaan.Tässä mallissa laatat 1 ja 4 ovat molemmat punaisia ja niillä on molemmilla laatta oikealla puolellaan. Tämä tarkoittaa, että s_0 ja s_2 molemmat toteuttavat kaavan. Tarkemmin sanottuna, $s_0(2/y)$ toteuttaa kaavan $R(x) \wedge xEy$ ja täten s_0 toteuttaa annetun kaavan. Samaan tapaan $s_2(5/y)$ toteuttaa kaavan $R(x) \wedge xEy$ ja täten s_2 toteuttaa annetun kaavan. Toisaalta $s_1(a/y)$ ei toteuta kaavaa $R(x)$ millään a:n arvolla, joten s_1 ei voi toteuttaa annettua kaavaa. Lopputulos on, että s_0 ja s_2 toteuttavat kaavan, mutta s_1 ei. □

Tehtävä 185 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $\forall y(B(y) \rightarrow y < x)$ seuraavassa laattamallissa?*

	x	y	z
s_0	1	5	2
s_1	5	1	3
s_2	4	2	4

R	*B*	*B*	*R*	*Y*
1	*2*	*3*	*4*	*5*

Ratkaisu: Kaava sanoo intuitiivisesti, että kaikki siniset laatat ovat muuttujaa x tulkitsevien laattojen vasemmalla puolella. Tässä laattamallissa siniset reunat ovat vain reunojen 4 ja 5 vasemmalla puolella. Tämä tarkoittaa, että s_1 ja s_2 toteuttavat kaavan, mutta s_0 ei toteuta kaavaa. Tarkemmin sanottuna $s_0(2/y)$ toteuttaa $B(x)$:n, muttei kaavaa $y < x$ ja täten s_0 ei toteuta annettua kaavaa. Toisaalta jos $s_1(a/y)$ toteuttaa $B(y)$:n niin silloin $a = 2$ tai $a = 3$ jolloin $s_1(a/y)$ toteuttaa myös kaavan $a < x$. Tämän takia s_1 toteuttaa annetun kaavan. Sama päättelyä voidaan käyttää tulkintafunktioon s_2. Loppujen lopuksi s_1 ja s_2 toteuttaa annetun kaavan, mutta s_0 ei. □

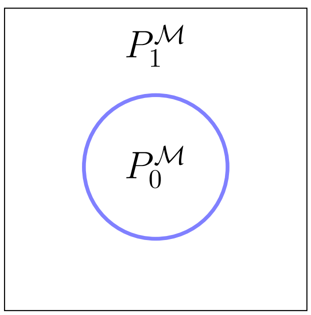
Tehtävä 186 *Anna kussakin tapauksessa unaarinen struktuuri ja tulkintafunktio joka toteuttaa annetun kaavan.*

1. $\exists x P_0(x) \wedge \forall x \neg P_1(x)$
2. $\neg(\exists x P_0(x) \vee \forall x \neg P_1(x))$

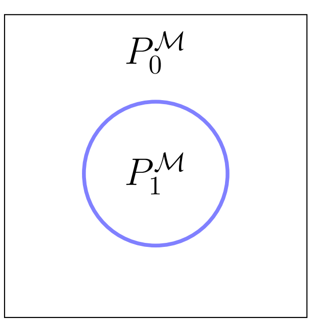
3. $\forall x(P_0(x) \to (P_1(x) \vee P_2(x)))$

Ratkaisu:

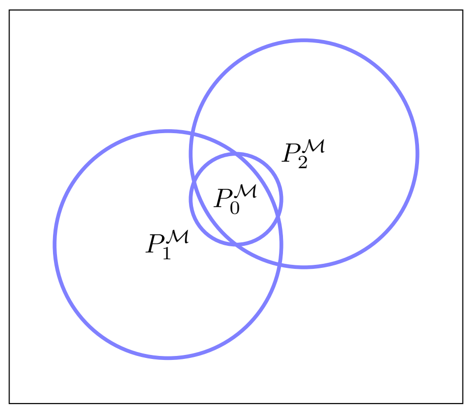
1. $\exists x P_0(x) \wedge \forall x \neg P_1(x)$: Kaava tarkoittaa intuitiivisesti, että P_0 ei ole tyhjä joukko, mutta P_1 on. Antakaamme esimerkiksi $M = \{0,1,2,3,4,5\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = 3,4,5$, $P_1^{\mathcal{M}} = \emptyset$, $s(x) = 0$. Nyt s toteuttaa kaavan $\exists x P_0(x)$ eli $3 \in P_0^{\mathcal{M}}$. s myös toteuttaa kaavan $\forall x \neg P_1(x)$ koska kaikille $a \in M$ niin $s(a/x)$ toteuttaa kaavan $\neg P_1(x)$ eli $a \notin P_1^{\mathcal{M}}$. Täten s toteuttaa kaavan $\exists x P_0(x) \wedge \forall x \neg P_1(x)$.



2. $\neg(\exists x P_0(x) \vee \forall x \neg P_1(x))$: Inuitiivisesti kaava tarkoittaa, että P_0 ei ole ei tyhjä joukko tai, että P_1 ei ole tyhjä. Mallissamme pitäisi täten olla sekä P_0 tyhjä että P_1 ei-tyhjä. Esimerkiksi, $M = \{0,1,2,3,4,5\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = \emptyset$, $P_1^{\mathcal{M}} = \{3,4,5\}$, $s(x) = 0$. Nyt s ei toteuta kaavaa $\forall x \neg P_1(x)$ koska $s(3/x)$ toteuttaa $P_1(x)$ eli $3 \in P_1^{\mathcal{M}}$. s ei myöskään toteuta kaavaa $\exists x P_0(x)$ koska kaikille $a \in M$ $s(a/x)$ ei toteuta kaavaa $P_0(x)$ koska $a \notin P_0^{\mathcal{M}}$. Täten s ei toteuta kaavaa $\exists x P_0(x) \vee \forall x \neg P_1(x)$. Täten s toteuttaa kaavan $\neg(\exists x P_0(x) \vee \forall x \neg P_1(x))$.



3. $\forall x(P_0(x) \to (P_1(x) \vee P_2(x)))$: Kaava tarkoittaa intuitiivisesti, että kaikki P_0:n alkiot ovat joko joukossa P_1 tai joukossa P_2. Esimerkiksi, $M = \{0,1,2,3,4,5\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = \{3,4\}$, $P_1^{\mathcal{M}} = \{1,3\}$, $P_2^{\mathcal{M}} = \{4,5\}$ ja $s(x) = 0$. Ottakaamme mielivaltainen a joukossa M ja näyttäkäämme, että $s(a/x)$ toteuttaa $P_0(x) \to (P_1(x) \vee P_2(x))$. Siis olettakaamme, että $s(a/x)$ toteuttaa $P_0(x)$:n eli, että a kuuluu joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$. Silloin $a = 3$ tai $a = 4$. Ensimmäisessä tapauksessa a kuuluu joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Toisessa tapauksessa a kuuluu joukkoon $P_2^{\mathcal{M}}$. Molemmissa tapauksissa $s(a/x)$ toteuttaa kaavan $P_1(x) \vee P_2(x)$. Olemme näyttäneet, että $s(a/x)$ toteuttaa kaavan $P_0(x) \to (P_1(x) \vee P_2(x))$ kaikille alkioille a joukossa M. Siis s toteuttaa kaavan $\forall x(P_0(x) \to (P_1(x) \vee P_2(x)))$.

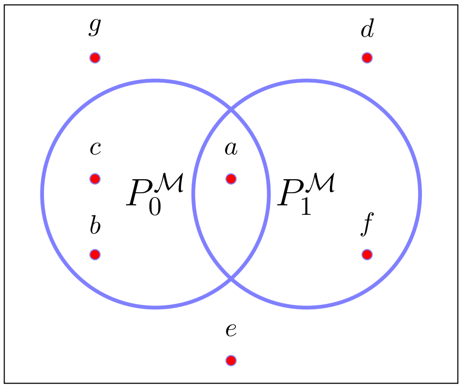


□

2.6.9 Tehtävät

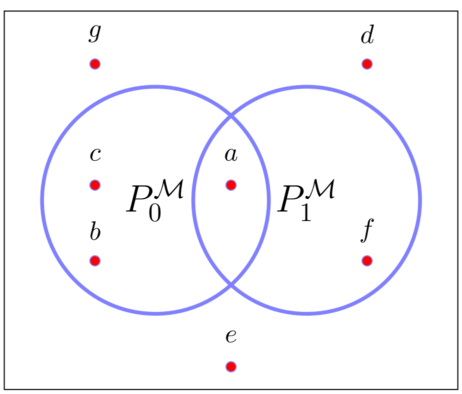
Tehtävä 187 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan* $\forall y(P_0(x) \to P_1(y))$ *seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	b	c
s_2	e	e	a



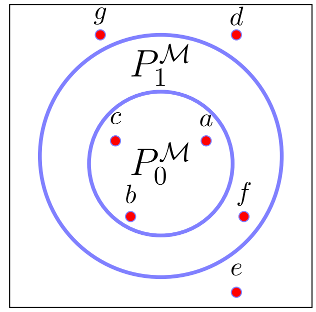
Tehtävä 188 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $P_1(z) \vee \forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	a
s_1	a	a	e
s_2	e	e	b



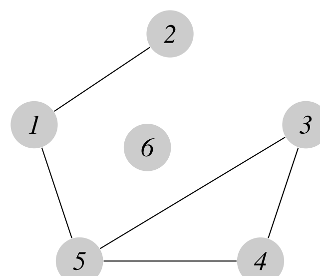
Tehtävä 189 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $P_1(y) \wedge \forall x(P_0(x) \rightarrow P_1(x))$ seuraavassa unaarisessa struktuurissa?*

	x	y	z
s_0	c	c	c
s_1	a	a	c
s_2	e	e	a



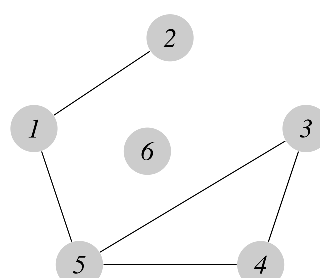
Tehtävä 190 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $\exists y(xEy \wedge yEz)$ seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	2	6	5
s_1	1	1	3
s_2	1	6	2



Tehtävä 191 *Mitkä tulkintafunktiot toteuttavat kaavan $\exists x \exists y(\neg x = y \wedge xEy \wedge yEz)$ seuraavassa verkossa?*

	x	y	z
s_0	1	5	1
s_1	1	1	2
s_2	1	2	4



Tehtävä 192 *Anna unaarinen struktuuri M ja tulkintafunktio joka toteuttaa lauseen*

$$\forall x(P_0(x) \lor \neg P_1(x) \lor P_2(x))$$

muttei lausetta

$$\exists x(P_0(x) \land \neg P_1(x) \land P_2(x))$$

joukossa $\mathcal{M}$.

Tehtävä 193 *Anna kussakin tapauksessa laattamalli joka toteuttaa annetun kaavan:*

1. $\exists x R(x) \land \forall x \neg B(x)$
2. $\neg(\exists x R(x) \land \forall x \neg B(x))$
3. $\forall x(B(x) \to \exists y(R(y) \land y < x))$

Tehtävä 194 *Anna kussakin tapauksessa laattamalli joka toteuttaa annetun kaavan:*

1. $\neg\forall x(B(x) \to \exists y(R(y) \land y < x))$
2. $\neg(\exists x \exists y(B(x) \land Y(y) \land x < y) \lor \exists x \exists y(B(x) \land Y(y) \land y < x))$

2.7 Validisuus

2.7.1 Johdanto

Nyt kun olemme oppineet predikaattilogiikan peruskäsitteet, voimme siirtyä logiikan ydinalueeseen. Voimme käyttää oppimiamme käsitteitä, kun analysoimme miksi jotkut päätelmät vaikuttavat tosilta ja toiset eivät.

Miksi me vahvasti uskomme, että lause “Jotkut päivät ovat sateisia” seuraa lauseesta “Jotkut päivät ovat sateisia ja tuulisia”, ilman, että otamme huomioon mitä “päivä”, “sateisia” ja “tuulisia” tarkoittavat? Ja miksi uskomme niin vahvasti, että lause “Jotkut päivät ovat sateisia” *ei* seuraa lauseesta “Jotkut päivät ovat sateisia tai tuulisia”? Se mistä nyt keskustellemme, ovat looginen validiteetti ja seuraus.

Predikaattilogiikan kaava aakkostolle L on *validi* jos kaikki tulkintafunktiot ja mallit aakkostolle L toteuttavat sen. Kaava, joka on validi ilmaisee loogisen totuuden, joka on aina tosi, oli sitten predikaatti– ja vakio–symbolejen merkitys mikä tahansa.

Esimerkki 2.16 *Tässä on joitakin esimerkkejä kaavoista jotka ovat valideja. Kussakin tapauksessa todistus on hyvin helppo. Pitää vain ottaa mielivaltainen malli ja mielivaltainen tulkintafunktio ja näyttää, että tulkintafunktio toteuttaa mallissa kaavan.*

Tautologiat, eli kaavat jotka ovat muodoltaan tautologioita, vaikka ne eivät ole propositiolauseita, ovat valideja.

- $(A \lor B) \leftrightarrow (B \lor A)$
- $A \lor \neg A$
- $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
- $\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$
- $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$
- $\forall x P_0(x) \lor \neg\forall x P_0(x)$

Tässä on joitakin yhtälöitä koskevia valideja kaavoja:

- $x = x$
- $x = y \to y = x$
- $(x = y \land y = z) \to x = z$

Valideja kvanttorikaavoja:

- $\forall x P_n(x) \to P_n(y)$
- $P_n(y) \to \exists x P_n(x)$
- $\forall x P_n(x) \to \forall y P_n(y)$

2.7.2 Looginen seuraus

Olettakaamme, että A ja B ovat predikaattilogiikan kaavoja aakkostossa L. Sanomme, että B on *looginen seuraus* A:lle, jos kaikissa malleissa kaikki tulkintafunktiot, jotka toteuttavat A:n, toteuttavat myös B:n. Yhtäpitävästi, $A \to B$ on validi. Huomaa: On todistettu, että ei ole mitään mekaanista tapaa ratkaista looginen seuraussuhde. Pitää, siis olla mielikuvitusta!

2.7.3 Ekvivalenssi

Olettakaamme taas, että A ja B ovat predikaattilogiikan kaavoja aakkostossa L. Sanomme, että A ja B ovat (loogisesti) *ekvivalentteja* jos ne ovat loogisia seurauksia toisistaan. Yhtäpitävästi, $A \leftrightarrow B$ on validi.

Tässä on yksinkertainen taulukko ekvivalensseista:

Kaava	Ekvivalentti kaava
$\neg\exists xA$	$\forall x\neg A$
$\neg\forall xA$	$\exists x\neg A$
$\forall x(A \wedge B)$	$\forall xA \wedge \forall xB$
$\exists x(A \vee B)$	$\exists xA \vee \exists xB$
$\exists x\exists yA$	$\exists y\exists xA$
$\forall x\forall yA$	$\forall y\forall xA$

2.7.4 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 195 *Näytä, että lause $\exists xA \vee \exists xB$ on looginen seuraus kaavasta $\exists x(A \vee B)$.*

Ratkaisu: Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on struktuuri ja s on tulkintafunktio siten, että s toteuttaa kaavan $\exists x(A \vee B)$ mallissa $\mathcal{M}$. On olemassa a joukossa M siten, että $s(a/x)$ toteuttaa kaavan $A \vee B$ mallissa $\mathcal{M}$. Täten $s(a/x)$ toteuttaa A:n tai B:n mallissa $\mathcal{M}$. Jos $s(a/x)$ toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$ niin silloin s toteuttaa kaavan $\exists xA$ ja täten myös kaavan $\exists xA \vee \exists xB$ mallissa $\mathcal{M}$. Toisaalta jos $s(a/x)$ toteuttaa B:n mallissa $\mathcal{M}$ niin silloin s toteuttaa kaavan $\exists xB$ ja täten myös kaavan $\exists xA \vee \exists xB$ mallissa $\mathcal{M}$. $\square$

Tehtävä 196 *Näytä, että lause $\forall x(A \wedge B)$ on looginen seuraus kaavasta $\forall xA \wedge \forall xB$.*

Ratkaisu: Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on struktuuri ja s on tulkintafunktio siten, että s toteuttaa kaavan $\forall xA \wedge \forall xB$ mallissa $\mathcal{M}$. Jotta voimme todistaa, että s toteuttaa kaavan $\forall x(A \wedge B)$ mallissa $\mathcal{M}$, antakaamme a:n olla mielivaltainen alkio joukossa M. Koska s toteuttaa kaavan $\forall xA \wedge \forall xB$, niin $s(a/x)$ toteuttaa sekä A:n että B:n mallissa $\mathcal{M}$. Olemme näyttäneet, että s toteuttaa kaavan $\forall x(A \wedge B)$ in $\mathcal{M}$. $\square$

Tehtävä 197 *Näytä, että kaava $\exists x(P_0(x) \wedge P_1(x))$* ei *ole looginen seuraus kaavasta $\exists xP_0(x) \wedge \exists xP_1(x)$.*

Ratkaisu: Nyt meidän täytyy keksiä malli ja tulkintafunktio. Periaatteessa tämä voisi olla hyvinkin vaikea haaste. Meidän onneksemme tässä tapauksessa malli ja tulkintafunktio ovat hyvin helppoja löytää. Kannattaa yleensä kokeilla ensin joitain hyvin yksinkertaisia malleja. Joko ne toimivat tai sitten ne opastavat meitä suuntaan josta saatamme löytää paremman mallin.

Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on struktuuri siten, että $M = \{0,1\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = \{0\}$ ja $P_1^{\mathcal{M}} = \{1\}$. Antakaamme s:n olla mikä tahansa tulkintafunktio. Täten s toteuttaa kaavan $\exists xP_0(x) \wedge \exists xP_1(x)$ mallissa $\mathcal{M}$, mutta s ei toteuta kaavaa $\exists x(P_0(x) \wedge P_1(x))$ mallissa $\mathcal{M}$. $\square$

Tehtävä 198 *Näytä, että kaava $\forall xP_0(x) \vee \forall xP_1(x)$ ei ole looginen seuraus kaavasta $\forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$.*

Ratkaisu: Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on struktuuri siten, että $M = \{0,1\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = \{0\}$ ja $P_1^{\mathcal{M}} = \{1\}$. Antakaamme s olla mikä tahansa tulkintafunktio. Tällöin s toteuttaa kaavan $\forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$ mallissa $\mathcal{M}$, mutta s ei toteuta kaavaa $\forall xP_0(x) \vee \forall xP_1(x)$ mallissa $\mathcal{M}$. $\square$

Tehtävä 199 *Näytä, että jos tautologian propositiosymbolit korvataan predikaattilogiikan kaavoilla, niin saadaan validi kaava.*

Ratkaisu: Tämä on melko pitkä todistus induktiolla propositiolauseiden rakenteen suhteen.

Jos A on propositiolause, niin antakaamme A':n olla sama lause, jossa jokainen propositiosymboli p_i on vaihdettu predikaattilogiikan kaavaan B_i tähän tapaan:

- $(p_0 \vee p_1)' = B_0 \vee B_1$.
- $(p_2 \wedge \neg p_1)' = B_2 \wedge \neg B_1$.
- $(p_0 \to (p_1 \to p_2))' = B_0 \to (B_1 \to B_2)$.

Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on struktuuri ja s on tulkintafunktio. Antakaamme v:n olla totuusjakauma siten, että $v(p_i)$ on 1 tai 0 riippuen siitä toteuttaako s kaavan B_i mallissa $\mathcal{M}$ vai ei.

Nyt voimme formuloida annetun tehtävän tarkasti:

Väite: $v(A) = 1$ jos ja vain jos s toteuttaa A':n mallissa $\mathcal{M}$.

Huomaa, että kun väite on todistettu, niin jos A on tautologia niin A' on validi.

Voimme käyttää induktiota A:n rakenteen (tai symbolien määrän) suhteen.

Tapaus 1: A on pelkkä p_i. Väite on tosi valitsemamme v:n vuoksi.

Tapaus 2: A ei ole propositiosymboli.

Teemme **Induktio-oletuksen**: Väite pätee kaikille A:n alikaavoille eli kaavoille jotka ovat A:ta lyhyempiä.

Tapaus 2.1: A on $B \vee C$, jolloin A' on $B' \vee C'$. Nyt $v(A') = 1$ joss $v(B') = 1$ tai $v(C') = 1$. Induktio-oletuksen nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa B':n tai C':n, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa A':n.

Tapaus 2.2: A on $B \wedge C$, jolloin A' on $B' \wedge C'$. Nyt $v(A') = 1$ joss $v(B') = 1$ ja $v(C') = 1$. Induktio-oletuksen nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa B':n ja C':n, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa A':n.

Tapaus 2.3: A on $\neg B$, jolloin A' on $\neg B'$. Nyt $v(A') = 1$ joss $v(B') = 0$. Induktio-oletuksen nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että s ei toteuta B':a, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa A':n.

Tapaus 2.4: A on $B \to C$, jolloin A' on $B' \to C'$. Nyt $v(A') = 1$ joss $v(B') = 0$ tai $v(C') = 1$. Induktio-oletuksen nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että s ei toteuta B':a tai s toteuttaa C':n, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa A':n.

Tapaus 2.5: A on $B \leftrightarrow C$, jolloin A' on $B' \leftrightarrow C'$. Nyt $v(A') = 1$ joss $v(B') = v(C')$. Induktio-oletuksen nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa B':n joss se myös toteuttaa C':n, joka taas on yhtäpitävää sen kanssa, että s toteuttaa A':n

$\square$

2.7.5 Tehtävät

Tehtävä 200 *Näytä, että*

1. *$\exists x \exists y A$ on ekvivalentti kaavan $\exists y \exists x A$ kanssa.*
2. *$\forall x \forall y A$ on ekvivalentti kaavan $\forall y \forall x A$ kanssa.*

Tehtävä 201 *Näytä, että*

1. *$\neg \exists x A$ on ekvivalentti kaavan $\forall x \neg A$ kanssa.*
2. *$\neg \forall x A$ on ekvivalentti kaavan $\exists x \neg A$ kanssa.*

Tehtävä 202 *Näytä, että $\forall y \exists x A$ on looginen seuraus kaavasta $\exists x \forall y A$.*

Tehtävä 203 *Näytä, että $\exists x \forall y R(x, y)$ ja $\forall y \exists x R(x, y)$ eivät ole ekvivalentteja.*

Tehtävä 204 *Näytä, että $\exists x \forall y R(x, y)$ ja $\forall x \exists y R(x, y)$ eivät ole ekvivalentteja.*

2.8 Vapaa ja sidottu muuttuja

2.8.1 Vapaa ja sidottu

Jos katsomme predikaattilogiikan muuttujia huolellisesti huomamme, että niillä on aina yksi kahdesta roolista.

Kaavan $\exists x(xEy)$ sisältö on, että y:llä on naapuri. Tämä on y:n ominaisuus ja saattaa olla joko tosi tai epätosi riippuen siitä mikä y on. Eli y:n rooli on se, että y on solmu jota tutkimme ja olemme "vapaita" valitsemaan y:n arvon. Tietenkin pitää muistaa, että riippuen arvosta jonka valitsemme y:lle kaava saattaa olla tosi tai epätosi, mutta olemme silti vapaita valitsemaan y:n arvon.

Muuttujan x tehtävä kaavassa $\exists x(xEy)$ taas on "sitoa" kvanttori $\exists x$ ja kaava xEy yhteen. Oikeastaan ei ole mitään väliä mikä arvo x:llä on alunperin sillä kvanttori pyrkii etsimään uuden arvon kuitenkin.

2.8.2 Esiintymä

Jokainen muuttujan x muotoa $\exists xB$ tai $\forall xB$ oleva esiintymä kaavassa on nimeltään *sidottu esiintymä*. Esiintymät jotka eivät ole sidottuja ovat *vapaita*. Alla sidotut esiintymät ovat laatikoitu, ja vapaat esiintymät ovat lihavoitu:

$$\exists x(xEy \wedge \forall z(zEy \to z = x))$$

$$\exists \boxed{x}(\boxed{x}E\mathbf{y} \wedge \forall \boxed{z}(\boxed{z}E\mathbf{y} \to \boxed{z} = \boxed{x}))$$

$$\exists x(xEy \wedge \exists y(\neg yEx))$$

$$\exists \boxed{x}(\boxed{x}E\mathbf{y} \wedge \exists \boxed{y}(\neg \boxed{y}E\boxed{x}))$$

2.8.3 Tulkintafunktiot ja vapaat muuntajat

Toteuttaako tulkintafunktio s kaavan mallissa vai ei, riippuu vain ja ainoastaan sitä minkä arvon s antaa vapaille muuntajille kaavassa.

Syy tähän on se, että kvanttorit muuttavat arvon, jonka tulkintafunktio antaa sidotuille muuntajille, joka tapauksessa. Kun muodostamme modifioidun tulkintafunktion $s(a/x)$, ei ole mitään väliä mikä $s(x)$ ennen oli.

Esimerkiksi, toteuttaako tulkintafunktio s lauseen $\exists x(xEy \wedge \exists y(\neg yEx))$ vai ei riipu yksinomaan $s(y)$:stä, ei $s(x)$:stä.

2.8.4 Lauseet

Joillakin kaavoilla ei ole yhtään vapaata muuttujaa. Niitä kutsutaan *lauseiksi*. Lauseilla on totuusarvo, joka on riippumaton mistään tulkintafunktiosta. Eli lauseet ilmaisevat joitain mallin omia ominaisuuksia ei ennalta päätettyjen alkioiden ominaisuuksia.

- $\forall y \exists x(xEy \wedge \exists z(\neg zEx \wedge \neg z = x))$ on lause joka sanoo verkosta, että jokaisella solmulla on naapuri ei-naapurin kanssa.

2.8.5 Totuus

Vihdoin pääsemme logiikan peruskäsitteeseen, eli totuuden käsitteeseen. Fysiikka, kemia, geologia, biologia yms. kaikki puhuvat totuudesta, mutta mikä on erikoista logiikassa on se, että voimme määritellä mitä totuus tarkoittaa.

Määritelmä 2.17 *Lause A on* totta *mallissa $\mathcal{M}$, jos jotkin (tai kaikki) totuusfunktiot toteuttavat sen. Tämä merkitään:*

$$M \models A.$$

Muuten lause A on epätosi *mallissa $\mathcal{M}$. Jos lause A on tosi mallissa $\mathcal{M}$, niin $\mathcal{M}$ on nimeltään A:n malli.*

Huomaa, että totuus määritellään käyttäen apukäsitettä toteutuvus. Eli ensisijainen käsite on, että tulkintafunktio s toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$, symbolein $\mathcal{M} \models_s A$, ja toissijainen käsite on, että lause on tosi mallissa $\mathcal{M}$, symbolein $\mathcal{M} \models A$. Kvanttorien takia emme voi yksin omaan käyttää totuuden käsitettä. Tarvitsemme myös toteutuvaisuuden käsitteen.

2.8.6 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 205 *Päättele ovatko seuraavan kaavan muuttujien esiintymät vapaita vai sidottuja.*

$$\exists x(P_0(x) \wedge P_1(y)).$$

Ratkaisu: Esiintymät jotka ovat laatikoissa ovat sidottuja, kun taas lihavoidut esiintymät ovat vapaita:

$$\exists \boxed{x}(P_0(\boxed{x}) \wedge P_1(\mathbf{y})).$$

□

Tehtävä 206 *Päättele ovatko seuraavan kaavan muuttujien esiintymät vapaita vai sidottuja.*

$$\forall x(R(x,z) \to S(x,z))$$

Ratkaisu: Esiintymät jotka ovat laatikoissa ovat sidottuja, kun taas lihavoidut esiintymät ovat vapaita:

$$\forall \boxed{\mathrm{x}}(R(\boxed{x},\mathbf{z}) \to S(\boxed{x},\mathbf{z}))$$

□

Tehtävä 207 *Mitkä seuraavista kaavoista ovat lauseita?*

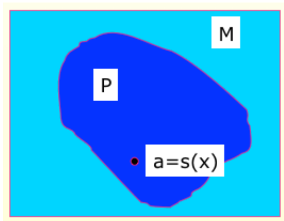
1. $\forall y \exists x(x < y)$
2. $P_0(c) \vee P_0(d)$
3. $\forall y \exists x(x < y \vee x = c)$
4. $\forall y \exists x(x < y) \vee x = c$

Ratkaisu: Kolme ensimmäistä. Viimeisessä kaavassa muuttujalla x on kaksi sidottua esiintymää ja yksi vapaa esiintymä. □

2.8.7 Tehtävät

Tehtävä 208 *Päätä ovatko seuraavan kaavan muuttujien esiintymät vapaita vai sidottuja.*

1. $\forall x(P_0(x) \to P_1(y))$
2. $\forall x(xEy \vee yEx)$



Kuva 2.4: Kaavan määrittelemä joukko

3. $\forall x(\forall y(xEy) \vee \forall z(yEz))$

Tehtävä 209 *Mitkä seuraavista kaavoista ovat lauseita?*

1. $P_0(x)$

2. $\forall x P_0(x)$

3. $\forall x P_0(y)$

4. $\forall y(\exists x(x < y) \vee \exists x(y < x))$

5. $\forall y(\exists x(x < y) \vee y < x)$

Tehtävä 210 *Olettakaamme, että A on kaava ja $\mathcal{M}$ on struktuuri. Näytä, että jos s ja s' ovat tulkintafunktioita jotka saavat saman arvon jokaisella muuttujalla joka esiintyy vapaana kaavassa A, niin silloin s toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos s' toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$.*

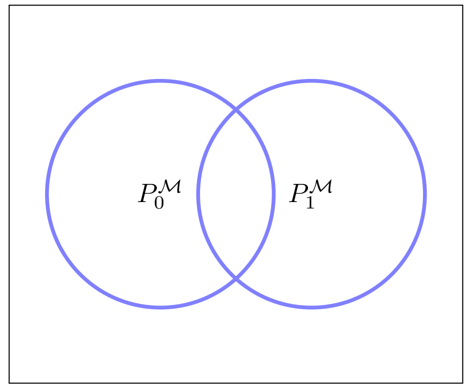
2.9 Määriteltävyys

2.9.1 Kaavan määrittelemä joukko

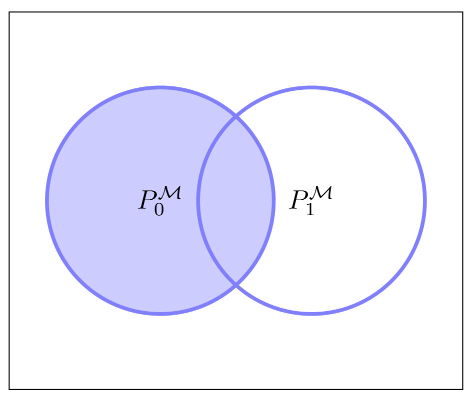
Kuten totuuden käsite, niin myös määriteltävyyden käsite kuuluu logiikan keskeiseen käsitteistöön. Syy miksi meillä on kaavoja ylipäänsä on, koska haluamme määritellä asioita. Eli katsokaamme mitä määriteltävyys tarkoittaa.

Olettakaamme, että A:lla on vain x vapaana muuttujana. Joukko P jonka A *määrittelee* mallissa $\mathcal{M}$ on niiden alkioiden a joukko joille jokin (ekvivalentisti jokainen) s siten, että $s(x) = a$ toteuttaa A:n.

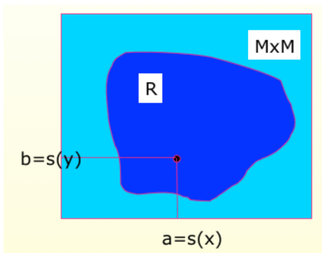
$P_0(x)$:n määrittelemä joukko yksipaikkaisessa mallissa (katso Kuva 2.5) ilmenee tummenettuna alueena seuraavassa kuvassa (katso Kuva 2.6).



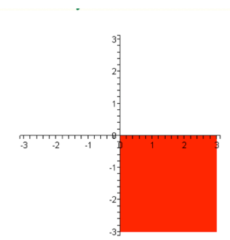
Kuva 2.5: Yksipaikkaisen mallin määriteltävyys



Kuva 2.6: $P_0(x)$:n määrittelemä joukko.



Kuva 2.7: Kaavan määrittelemä relaatio



Kuva 2.8: Kaavan määrittelemä relaatio

2.9.2 Binäärinen relaatio kaavan määrittelemänä

Olettakaamme että A on kaava jossa vain x ja y ovat vapaita muuttujia. Binäärinen relaatio R jonka kaava A *määrittelee* mallissa $\mathcal{M}$ on sellaisten parien (a, b) joukko, että jokin tulkintafunktio s jolla $a = s(x)$ ja $b = s(y)$ toteuttaa A:n (katso Kuva 2.7).

Kuva 2.8 näyttää kaavan $x > c \wedge y < c$ määrittelemän binäärisen relaation mallissa $M = (\mathbb{R}, <, 0)$, $c^M = 0$.

2.9.3 Määriteltävien joukkojen ominaisuuksia

Jos $\mathcal{M}$:n osajoukot P ja P' ovat määriteltäviä, niin silloin myös $P \cup P'$, $P \cap P'$ ja $M - P$ ovat määriteltäviä. Joukkoperhettä, jolla on tämä ominaisuus kutsutaan *Boolen algebraksi*.

Tästä voimme jatkaa. Jos *binääriset relaatiot* R ja R' ovat määriteltäviä mallissa $\mathcal{M}$, niin silloin myös $R \cup R'$, $R \cap R'$ ja $M - R$ ovat määriteltäviä. Tämä on myös Boolen algebra.

2.9.4 Projektioita

Ensimmäinen projektio binäärisestä relaatiosta R mallissa $\mathcal{M}$ on niiden alkioiden a joukko, joille aRb pätee jollekin b:n arvolle M:ssä (katso Kuva 2.9).

Toinen projektio binäärisestä relaatiosta R mallissa $\mathcal{M}$ on niiden alkioiden b joukko, joille aRb pätee jollekin a:n arvolle M:ssä (katso Kuva 2.9).

Ensimmäinen ja toinen projektio binäärisestä relaatiosta ovat määriteltäviä joukkoja.

Todistus: Olettakaamme että R on määritelty kaavalla A mallissa $\mathcal{M}$. Ensimmäinen projektio on määritelty kaavalla $\exists y A$, ja toinen projektio taas kaavalla $\exists x A$.

Miksi? Olettakaamme että a on ensimmäisessä projektiossa. Silloin on olemassa b siten, että aRb. Koska A määrittelee R:n, niin on olemassa tulkintafunktio s siten, että $s(x) = a$, $s(y) = b$ ja s toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$. Erityisesti, $s(b/y)(= s)$ toteuttaa $\exists y A$:n mallissa $\mathcal{M}$ ja $s(b/y)(x) = a$. Siis a on $\exists y A$:n määrittelemässä joukossa.

Jatkakaamme nyt tätä ajattelumallia. Jos a on $\exists y A$:n määrittelemässä joukossa, niin silloin $a = s'(x)$ jollekin s' joka toteuttaa $\exists y A$:n mallissa $\mathcal{M}$. Siis on olemassa jokin b siten, että $s'(b/y)$ toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$. Siis $(s'(b/y)(x), s'(b/y)(y))(= (a, b))$ kuuluu R:ään ja olemme näyttäneet, että a on R:n ensimmäisessä projektiossa.

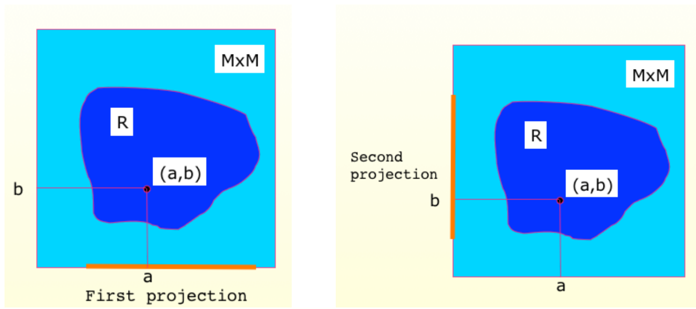
2.9.5 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 211 *Näytä joukko jonka kaava $P_1(x)$ määrittelee Kuvan 2.5 mallissa.*

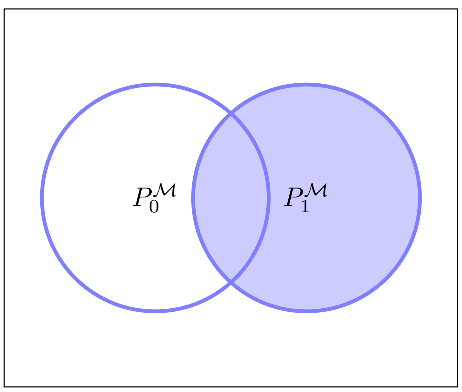
Ratkaisu: Kaava $P_1(x)$ määrittelee niiden alkioiden joukon, jotka kuuluvat joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Toisin sanoen, kaava $P_1(x)$ määrittelee joukon $P_1^{\mathcal{M}}$ (Kuva 2.10).
□

Tehtävä 212 *Näytä joukko jonka kaava $P_0(x) \vee P_1(x)$ määrittelee Kuvan 2.5 mallissa.*

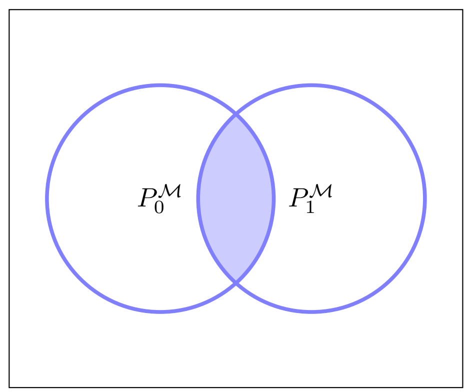
Ratkaisu: Kaava $P_0(x) \vee P_1(x)$ määrittelee niiden alkioiden joukon jotka kuuluvat joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$ *tai* joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Toisin sanoen, kaava $P_0(x) \vee P_1(x)$ määrittelee joukon $P_0^{\mathcal{M}} \cup P_1^{\mathcal{M}}$ (Kuva 2.11).
□



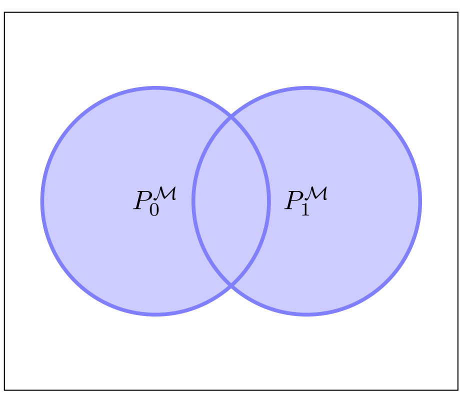
Kuva 2.9: Relaation ensimmäinen ja toinen projektio.



Kuva 2.10: Kaavan $P_1(x)$ määrittelemä joukko.



Kuva 2.12: Kaavan $P_0(x) \wedge P_1(x)$ määrittelemä joukko.



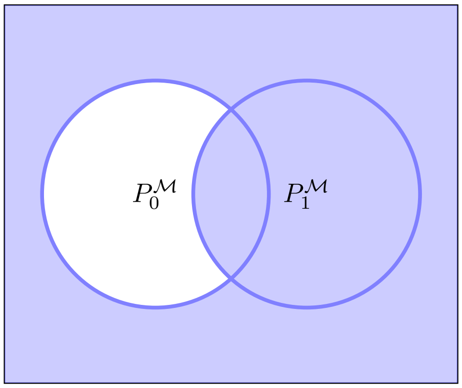
Kuva 2.11: Kaavan $P_0(x) \vee P_1(x)$ määrittelemä joukko.

Tehtävä 213 *Näytä joukko jonka kaava $P_0(x) \wedge P_1(x)$ määrittelee Kuvan 2.5 mallissa.*

Ratkaisu: Kaava $P_0(x) \wedge P_1(x)$ määrittelee niiden alkioiden joukon, jotka kuuluvat joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$ *ja* joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Toisin sanoen, kaava $P_0(x) \wedge P_1(x)$ määrittelee joukon $P_0^{\mathcal{M}} \cap P_1^{\mathcal{M}}$ (Kuva 2.12).
□

Tehtävä 214 *Näytä joukko jonka kaava $P_0(x) \rightarrow P_1(x)$ määrittelee Kuvan 2.5 mallissa.*

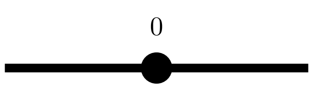
Ratkaisu: Kaava $P_0(x) \rightarrow P_1(x)$ määrittelee niiden alkioiden joukon jotka joko eivät kuulu joukkoon $P_0^{\mathcal{M}}$ tai kuuluvat joukkoon $P_1^{\mathcal{M}}$. Toisin sanoen, kaava $P_0(x) \rightarrow P_1(x)$ määrittelee joukon $(M \setminus P_0^{\mathcal{M}}) \cup P_1^{\mathcal{M}}$.



□

Tehtävä 215 *Kuvaile reaalilukujen järjestetty struktuuri kun nolla on mukana vakiona.*

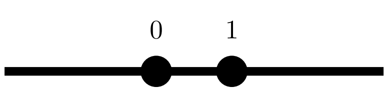
Ratkaisu: $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0)$ on seuraava struktuuri: Sen aakkosto on $\{R_0, c\}$ missä R_0 on binäärinen relaatio symboli ja c on vakio symboli. $R_0^{\mathcal{M}} = \{(a, b) : a < b\}$, $c^{\mathcal{M}} = 0$. Huomaa, että koska meidän aakkostossamme on vain yksi vakio symboli voimme vain puhua yhdestä reaaliluvusta, nollasta. Muita reaalilukuja voidaan käsitellä käyttäen kvanttoreita, mutta ainoa asia mitä voimme sanoa niistä on ovatko ne negatiivisia vai positiivisia. Joten tämä struktuuri antaa todella huonon kuvan reaaliluvuista, mutta se on hyödyllinen yksinkertaisuutensa takia.



□

Tehtävä 216 *Kuvaile reaalilukujen järjestetty struktuuri kun nolla ja yksi ovat mukana vakioina.*

Ratkaisu: $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$ on seuraava rakenne: Sen aakkosto on $\{R_0, c, d\}$ on binäärinen relaatio symboli ja c, d ovat vakio symboleja. $R_0^{\mathcal{M}} = \{(a, b) : a < b\}$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $d^{\mathcal{M}} = 1$. Tämä struktuuri on huomattavasti rikkaampi kuin pelkkä $(\mathbb{R}, <, 0)$.



□

Tehtävä 217 *Näytä joukko, jonka seuraava kaava määrittelee struktuurissa $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $d^{\mathcal{M}} = 1$.*

1. $x < c$

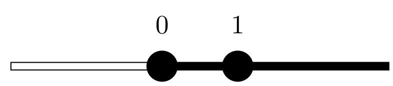
2. $c < x \wedge x < d$

3. $d < x$

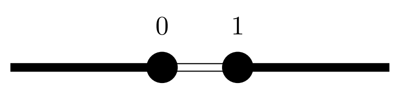
4. $x < c \vee d < x$

Ratkaisu: Määritelty joukko on jokaisessa kuvassa ontto.

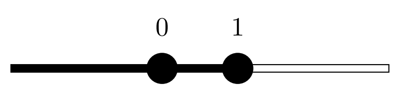
1. $x < 0$:



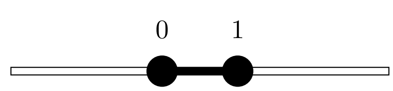
2. $0 < x \wedge x < 1$:



3. $1 < x$:



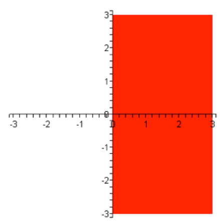
4. $x < 0 \vee 1 < x$:



□

Tehtävä 218 *Näytä binäärinen relaatio jonka kaava $c < x$ määrittelee struktuurissa $M = (\mathbb{R}, <, 0)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$.*

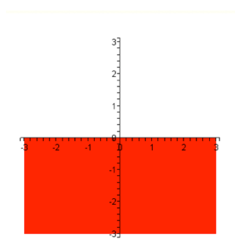
Ratkaisu: Huomaa, että etsimme binääristä relaatiota. Tämä saattaa vaikuttaa hieman oudolta, koska kaavassa $c < x$ on vain yksi muuttuja, mutta voimme ajatella, että kaava ei tee mitään vaatimuksia muuttujalle y. Ikään kuin kaava olisi seuraavassa muodossa $c < x \wedge y = y$.



□

Tehtävä 219 *Etsi binäärinen relaatio, jonka kaava $y < c$ määrittelee struktuurissa $M = (\mathbb{R}, <, 0)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $d^{\mathcal{M}} = 1$.*

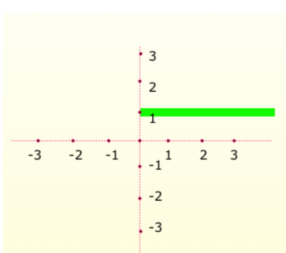
Ratkaisu:

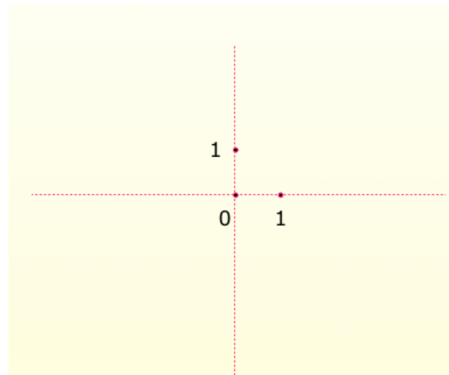


□

Tehtävä 220 *Etsi binäärinen relaatio, jonka kaava $c < x \wedge y = d$ määrittelee struktuurissa $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $d^{\mathcal{M}} = 1$.*

Ratkaisu:



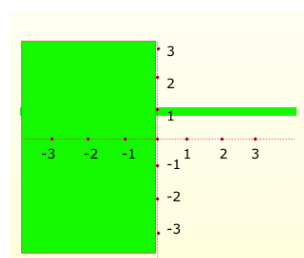


Kuva 2.13: Määriteltävyys struktuurissa $(\mathbb{R}, <, 0, 1)$.

□

Tehtävä 221 *Etsi binäärinen relaatio, jonka kaava $x < c \vee y = d$ määrittelee struktuurissa $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $d^{\mathcal{M}} = 1$.*

Ratkaisu:



□

2.9.6 Tehtävät

Tehtävä 222 *Näytä joukko, jonka kaava $P_0(x) \wedge \neg P_1(x)$ määrittelee Kuvan 2.5 unaaristruktuurissa.*

Tehtävä 223 *Näytä joukko, jonka kaava $P_0(x) \leftrightarrow P_1(x)$ määrittelee Kuvan 2.5 unaaristruktuurissa.*

Tehtävä 224 *Piirrä binäärinen relaatio jonka kaava $x > d \vee y < c$ määrittelee struktuurissa $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $d^{\mathcal{M}} = 1$ (Katso Kuva 2.13).*

Tehtävä 225 *Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava* $x < d \to x = y$ *määrittelee struktuurissa* $M = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$*,* $c^{\mathcal{M}} = 0$ *ja* $d^{\mathcal{M}} = 1$ *(Katso Kuva 2.13).*

2.10 Termeit ja sijoitukset

2.10.1 Termit

Vakioita $\{c, d, \ldots\}$ ja muuttujia $\{x, y, z, \ldots\}$ kutsutaan *termeiksi*. Termien ominaisuus on, että niillä on jokin *arvo* jos määrittelemme mallin ja tulkintafunktion. Logiikassa lauseilla on totuusarvo joko 1 tai 0, mutta termeillä voi olla mikä tahansa mallin alkio arvonaan.

Termin t *arvo* mallissa $\mathcal{M}$ tulkintafunktiolla s, merkitään $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$, on määritelty seuraavasti:

- Jos t on vakio c, niin silloin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ on $c^{\mathcal{M}}$.
- Jos t on muuttuja x, niin silloin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ on $s(x)$.

Jos meillä olisi funktiosymboleita kuten $+$, $-$ ja $\cdot$, niin meillä olisi lisää termejä: $x + y$, $x \cdot y$, $(x + y) \cdot (x - y)$, $(x \cdot x) \cdot x$, jne. Voisimme kirjoittaa *polynomeja*.

2.10.2 Sidotun muuttujan muuttaminen

Tiettyjen rajojen sisällä sidottu muuttuja voidaan muuttaa toiseen ilman, että lauseen merkitys muuttuu. Esimerkiksi: jos vaihdat x:n z:aan lauseessa $\forall x R_0(x, y)$, lauseen merkitys ei muutu koska seuraavat ovat ekvivalentteja:

$$\mathcal{M} \models_s \forall x R_0(x, y)$$
$$\mathcal{M} \models_s \forall z R_0(z, y)$$

Molemmat tarkoittavat

$$\{a \in M : (a, s(y)) \in R^{\mathcal{M}}\} = M$$

eikä sen enempää x:llä kuin z:llakaan ole tässä mitään roolia.

Tämä on kuin algebrassa, molemmat seuraavista lausekkeista:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i$$
$$\sum_{j=1}^{5} a_j$$

tarkoittavat samaa kuin:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Mutta pitää olla varovainen, kun muuttaa sidottua muuttujaa. Jos muuttaa x:n y:hyn lauseessa $\forall x R_0(x, y)$, merkitys muuttuu. Seuraavat eivät ole enää ekvivalentteja:

$$\mathcal{M} \models_s \forall x R_0(x, y)$$
$$\mathcal{M} \models_s \forall y R_0(y, y)$$

Ensin mainittu tarkoittaa:

$$\{a \in M : (a, s(y)) \in R_0^{\mathcal{M}}\} = M,$$

kun taas jälkimmäinen tarkoittaa

$$\{a \in M : (a, a) \in R_0^{\mathcal{M}}\} = M.$$

Tätä voisi verrata algebran seuraaviin lausekkeisiin:

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i,k}$$
$$\sum_{k=1}^{5} a_{k,k}.$$

Ensin mainittu tarkoittaa:

$$a_{1,k} + a_{2,k} + a_{3,k} + a_{4,k} + a_{5,k}$$

ja jälkimmäinen taas tarkoittaa:

$$a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + a_{5,5}.$$

Yleinen sääntö on seuraava: Kun sidottu muuttuja muutetaan toiseksi, niin minkään vapaan muuttujan ei pitäisi vaihtua sidotuksi, ja uusi sidottu muuttuja ei saa olla konfliktissa minkään vanhan sidotun muuttujan kanssa, kuten tulisi käymään, jos lauseessa $\forall x \forall y R(x, y)$ sidottu muuttuja y muutettaisiin muuttujaksi x. Tästä saataisiin lause $\forall x \forall y R(x, x)$.

Helpoin tapa noudattaa sääntöä on seuraava: Jos sidottu muuttuja muutetaan kokonaan *uudeksi* muuttujaksi, niin se ei voi olla konfliktissa minkään muun muuttujan kanssa ja se ei voi tehdä mistään vapaasta muuttujasta sidottua.

2.10.3 Käsite *vapaa muuttujalle*

Perehdymme nyt syvemmälle kysymykseen, milloin voimme vaihtaa yhden muuttujan kaavassa toiseen muuttujaan. Kun tarkastelemme yksinkertaisia lyhyitä kaavoja, tämä päätös on aika helppo ja voidaan yleensä päätellä maalaisjärjellä. Mutta haluamme tarkan määritelmän jonka voimme ohjelmoida tietokoneeseen. Loppujen lopuksi kaavojen manipulointi tietokoneella on nykyään hyvin yleistä, varsinkin logiikan teollisissa sovelluksissa.

Määrittelemme seuraavan apukäsitteen:

Määritelmä 2.18 *Muuttuja x on* vapaa muuttujalle y *kaavassa A, jos mikään y:n vapaa esiintymä A:ssa ei muutu x:n sidottuksi esiintymäksi kun y korvataan x:llä kaavassa A.*

Esimerkiksi, x on vapaa muuttajalle y kaavassa $\forall z R_0(z, y)$. Tämän sijoituksen jälkeen kaava on $\forall z R_0(z, x)$. Toisaalta x ei ole vapaa muuttajalle y kaavassa $\forall x R_0(x, y)$. Tämän sijoituksen jälkeen kaava olisi $\forall x R_0(x, x)$, joka ei vastaa alkuperäistä kaavaa.

Käsite muuttujasta, joka on vapaa jollekin toiselle muuttujalle, voidaan määritellä tarkemmin induktiivisesti, mutta sivuutamme tämän määritelmän.

Vakio on aina vapaa muuttujalle missä tahansa kaavassa. Tämän syy on siinä, että jos vakio korvaa muuttujan niin korvauksesta ei voi tulla yhtään uutta sidotun muuttuja esiintymää, koska vakio ei ole muuttuja ylipäänsä.

2.10.4 Sijoitus

Sijoitus on yleinen piirre matematiikassa. Jos meillä on polynomi $P(x) = x^2 + 3x + 1$, voimme sijoittaa joitain x:n arvoja kaavaan ja tutkia arvoja joita polynomi saa, esimerkiksi $P(0) = 1, P(1) = 5, P(-1) = -1$.

Samankaltaisesti, jos meillä on kaava A jossa on muuttuja y jolla on vapaita esiintymiä A:ssa, niin intuitiivisesti A sanoo jotain y:stä jokaisessa mallissa. Joillekin y:n arvoille A on tosi, riippuen tietenkin siitä esiintyykö A:ssa joitain muita vapaita muuttujia, ja joillekin toisille se on epätosi. Jos sijoitamme vakion c y:n vapaisiin esiintymiin, niin kaava A:n arvo sanoo jotain vakiosta c. Jos taas sijoitamme jonkin aivan uuden muuttujan w entisen muuttujan y:n sijalle, niin kaava sanoo jotain w:stä ja sen arvosta, ei y:stä.

Tarkemmin, $A(t/y)$ on kaava joka on saatu A:sta sijoittamalla termi t jokaiseen y:n vapaaseen esiintymään A:ssa. Emme käytä tätä merintätapaa ellemme tiedä, että t on vapaa muuttujalle y kaavassa A.

A	$A(x/y)$
$P_0(y)$	$P_0(x)$
$\exists z(zEy)$	$\exists z(zEx)$
$\exists z(R_0(z,y) \to \forall x R_1(x,z))$	$\exists z(R_0(z,x) \to \forall x R_1(x,z))$
$\exists z(R_0(z,y) \to \forall x R_1(x,y))$	(ei sallittu)

Sijoittamisen tärkein ominaisuus on:

Lemma 2.19 (Sijoituslemma) *Jos x on vapaa muuttujalle y A:ssa, niin silloin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

1. $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A(x/y)$

Tämä sijoituslemma on helppo todistaa induktiolla, mutta se sivutetaan.

2.10.5 Valideja kvanttifioituja kaavoja

On olemassa kaksi validia peruskaavaa jotka liittyvät kvanttoreihin. Ensimmäinen on

$$\forall y A \to A(t/y),$$

aina kun t on vapaa muuttujalle y A:ssa.

Mutta miksi tämä on validi? Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on malli ja s on tulkintafunktio. Olettakaamme myös, että s toteuttaa kaavan $\forall y A$ mallissa $\mathcal{M}$. Antakaamme $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$. Tällöin $s(a/y)$ toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$. Sijoituslemman nojalla s toteuttaa lauseen $A(t/y)$ mallissa $\mathcal{M}$.

Toinen on

$$A(t/y) \to \exists y A,$$

aina kun t on vapaa muuttujalle y A:ssa.

Mutta miksi tämä on validi? Olettakaamme taas, että $\mathcal{M}$ on malli ja s on tulkintafunktio. Olettakaamme myös, että s toteuttaa $A(t/y)$:n mallissa $\mathcal{M}$. Olettakaamme $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Sijoituslemman nojalla $s(a/y)$ toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$. Siis s toteuttaa $\exists y A$:n mallissa $\mathcal{M}$.

Kumpikaan kaava ei ole validi jos t ei ole vapaa muuttujalle y A:ssa.

2.10.6 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 226 *Mitkä annetuista termeistä ovat vapaita muuttujalle y kaavassa $\exists x(P_0(x) \wedge P_1(y))$?*

1. x
2. c
3. y
4. z

Ratkaisu:

termi	vapaa muuttujalle y?
x	ei
c	kyllä
y	kyllä
z	kyllä

□

Tehtävä 227 *Mitkä annetuista termeistä ovat vapaita muuttujalle z kaavassa $\forall x(R(x,z) \to S(x,z))$?*

1. y
2. c
3. x
4. z

Ratkaisu:

termi	vapaa muuttujalle z?
y	kyllä
c	kyllä
x	ei
z	kyllä

□

Tehtävä 228 *Mitkä annetuista muuttujista voidaan vaihtaa sidotun muuttujan x:n kanssa kaavassa $\exists x(P_0(x) \wedge P_1(y))$:*

1. z
2. y
3. x

Ratkaisu:

termi	voidaanko vaihtaa?	lopputulos
z	kyllä	$\exists z(P_0(z) \wedge P_1(y))$
y	ei	$\exists y(P_0(y) \wedge P_1(y))$
x	kyllä	$\exists x(P_0(x) \wedge P_1(y))$

□

Tehtävä 229 *Mitkä annetuista muuttujista voidaan vaihtaa sidotun muuttujan x kanssa kaavassa $\forall x(R(x,z) \to S(x,z))$:*

1. z
2. y
3. x

Ratkaisu:

termi	voidaanko vaihtaa?	lopputulos
z	ei	$\forall z(R(z,z) \to S(z,z))$
y	kyllä	$\forall y(R(y,z) \to S(y,z))$
x	kyllä	$\forall x(R(x,z) \to S(x,z))$

□

Tehtävä 230 *Näytä, että implikaatiot*

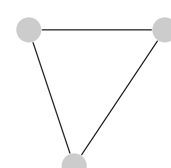
$$\forall y A \to A(t/y),$$

ja

$$A(t/y) \to \exists y A,$$

eivät ole valideja jos ehto "t on vapaa muuttujalle y mallissa A" poistetaan.

Ratkaisu: Olkoon $\mathcal{M}$ alla oleva verkko ja olkoon s mielivaltainen tulkintafunktio. Silloin $\mathcal{M} \models_s \forall y \exists x(xEy)$, mutta ei ole totta, että $\mathcal{M} \models_s \exists x(xEx)$. Tosiaan, x ei ole vapaa muuttujalle y kaavassa $\exists x(xEy)$. Toinen väite on samankaltainen.



□

2.10.7 Tehtävät

Tehtävä 231 *Mitkä annetuista termeistä ovat vapaita muuttujalle x seuraavassa kaavassa?*

$$\exists x R_0(y,x) \wedge P_1(y)$$

1. x
2. c
3. y
4. z

Tehtävä 232 *Mitkä annetuista muuttujista voidaan vaihtaa sidotun muuttujan x:n kanssa seuraavassa kaavassa?*

$$\exists x R_0(x,z) \wedge \exists y R_1(z,y)$$

1. z
2. y
3. x

Tehtävä 233 *Todista tämä erikoistapaus Sijoituslemmasta (ilman, että käytät Sijoituslemmaa itseään): Oletetaan, että A on kaava $\forall z(R_0(y,z) \to P_0(z))$ ja, että termi t on muuttuja x. Silloin seuraavat are ekvivalentteja, riippumatta siitä mitä $\mathcal{M}$ ja s ovat:*

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, *where* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$.

Tehtävä 234 *Todista Sijoituslemma.*

2.11 Luonnollinen päättely

Propositiologiikassa luonnollinen päättely oli tapa vetää johtopäätöksiä tilanteessa jossa totuustaulut olisivat liian monimutkaisia. Toisaalta, luonnollinen päättely matkii arkikielen päätelmiämme. Kun siirrymme predikaattilogiikkaan, totuustaulumenetelmä ei ole ylipäätään enää mahdollinen. Totuustaulujen sijaan meidän täytyy käyttää malleja. Koska mallit voivat olla äärettömiä ja hyvin monimutkaisia ei ole mitään mekaanista tapaa käydä kaikki mallit läpi. Tämän takia validiteetti on predikaattilogiikassa *ratkeamaton* ongelma eli ei ole mitään totuustaulumenetelmän kaltaista mekaanista tapaa tarkistaa lauseen validiteetti. Tämän takia luonnollinen päättely on vielä tärkeämpää predikaattilogiikassa kuin propositiologiikassa.

2.11.1 Mitä luonnollinen päättely on predikaattilogiikassa?

Luonnollinen päättely predikaattilogiikassa on samankaltaista kuin luonnollinen päättely propositiologiikassa. Erityisesti, konnektiivejen säännöt ovat aivan samat, mutta meillä on uusia sääntöjä kvanttoreita varten.

2.11.2 Universaalikvanttorin säännöt

Universaalikvanttorin tuonti- ja eliminointisäännöt ovat seuraavat:

$\forall$-Eliminointisääntö: Termin t on oltava vapaa muuttujalle x A:ssa:

$$\frac{\forall x A}{A(t/x)}\ \forall\mathbf{E}$$

$\forall$-Tuontisääntö: x ei saa esiintyä vapaana muuttujana missään hylkäämättömässä oletuksessa A:n johdossa:

$$\frac{A}{\forall x A}\ \forall\mathbf{T}$$

Perustelu $\forall$-eliminointisäännolle on seuraava: intuitiivinen merkitys lauseelle $\forall x A$ on, että jokainen alkio (mallin) universumissa toteuttaa A:n kun sitä käytetään x:n arvona. Siis olipa t:n arvo mikä tahansa, niin sen pitäisi toteuttaa A. Tarkemmin, jos $\mathcal{M} \models_s \forall x A$, niin silloin mille tahansa a:lle M:stä, $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$, varsinkin jos $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Sijoituslemman nojalla $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$.

Perustelu $\forall$-tuontisäänölle on seuraava: Tiedämme A:n ja tyypillisessä tilanteessa x ilmenee vapaana A:ssa, jolloin A kertoo jotakin x:stä. Toisaalta, emme ole tehneet mitään oletusta x:stä koska x ei ole vapaa missään oletuksessamme. Siis x on täysin mielivaltainen ja voi olla mitä tahansa. Siis olemme oikeassa kun päättelemme $\forall x A$.

Tarkemmin, meillä on päättely A:sta. Intuitiivisesti (tämä tarvitsee todistuksen) mikä tahansa tulkintafunktio s joka toteuttaa A:n päättelyssä tehdyt oletukset myös toteuttaa A:n. Yritämme todistaa, että mikä tahansa tulkintafunktio joka toteuttaa A:n päättelyssä tehdyt oletukset toteuttaa myös $\forall x A$:n. Jotta voimme todistaa tämän, oletamme, että $\mathcal{M}$ on malli ja s toteuttaa A:n päättelyssä tehdyt oletukset. Tällöin a:sta riippumatta myös $s(a/x)$ toteuttaa samat oletukset, koska x ei ole vapaa muuttuja niissä (tämä tarvitsee lyhyen todistuksen, mutta ohitamme sen). Näin ollen s toteuttaa $\forall x A$:n.

2.11.3 Esimerkki päättelystä

Katsokaamme seuraavaa arkikielen päättelyä:

> Jos jokainen miljonääri on iloinen tai kiireetön,
> niin jokainen kiireinen miljonääri on iloinen.

Syy miksi ajattelemme että tämä on validi päättely on seuraava: Olkoon x kiireinen miljonääri. Oletuksen mukaan x on iloinen tai kiireetön. Mutta oletamme, että x on kiireinen. Eli x:n täytyy olla iloinen.

Predikaattilogiikan kielessä tämä on:

> Jos $\forall x(P_0(x) \to (P_1(x) \lor \neg P_2(x)))$,
> niin $\forall x((P_0(x) \land P_2(x)) \to P_1(x))$.

Voimme epämuodollisesta osoittaa saman predikaattilogiikassa:

Otetaan x ja oletetaan $P_0(x) \land P_2(x)$. Yritämme johtaa $P_1(x)$:n, olettamalla, $P_0(x) \to (P_1(x) \lor \neg P_2(x))$:n.Tästä ja $P_0(x)$:stä saamme $P_1(x) \lor \neg P_2(x)$. Oletus on $P_2(x)$, joten $P_1(x)$. Koska x on mielivaltainen, saamme $\forall x(P_0(x) \to (P_1(x) \lor \neg P_2(x)))$. Tämä mielessämme, voimme rakentaa oikean luonnollisen päättelyn (katso Kuva 2.14).

2.11.4 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 235 *Kaavan $\forall z R_0(z, y)$ päättely kaavasta $\forall x R_0(x, y)$.*

Ratkaisu: Huomaa, että alla näkyvässä päättelyssä z on vapaa muuttujalle x kaavassa $R_0(x, y)$ ja, että z ei esiinny vapaana kaavassa $\forall z R_0(z, y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x R_0(x,y)}{R_0(z,y)}\ \forall\mathbf{E}}{\forall z R_0(z,y)}\ \forall\mathbf{T}$$

□

Tehtävä 236 *Kaavan $\forall y \forall x(R_0(x, y) \lor R_1(y, z))$ päättely kaavasta $\forall x \forall y(R_0(x, y) \lor R_1(y, z))$.*

Ratkaisu: Alla kahdessa ensimmäisessä askeleessa käyttäen $\forall$-Eliminointisääntöä. Voimme havaita, että x on aina vapaa muuttujalle x ja, että y on aina vapaa muuttujalle y. Seuraavassa kahdessa askeleessa käytetään $\forall$-Tuontisääntöä. Voimme havaita, että muuttujat x ja y eivät esiinny vapaina oletuksessa $\forall x \forall y(R_0(x, y) \lor R_1(y, z))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(R_0(x,y)\lor R_1(y,z))}{\forall y(R_0(x,y)\lor R_1(y,z))}\ \forall\mathbf{E}}{R_0(x,y)\lor R_1(y,z)}\ \forall\mathbf{E}}{\forall x(R_0(x,y)\lor R_1(y,z))}\ \forall\mathbf{T}}{\forall y\forall x(R_0(x,y)\lor R_1(y,z))}\ \forall\mathbf{T}$$

□

Tehtävä 237 *Kaavan $\forall x P_1(x)$ päättely kaavoista $\forall x P_0(x)$ ja $\forall x(P_0(x) \to P_1(x))$.*

Ratkaisu: Alla olevassa päättelyssä on tärkeää muistaa, että x on aina vapaa muuttujalle x ja, että x ei esiinny vapaana oletuksissa $\forall x P_0(x)$ ja $\forall x(P_0(x) \to P_1(x))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P_0(x)}{P_0(x)}\ \forall\mathbf{E} \qquad \dfrac{\forall x(P_0(x)\to P_1(x))}{P_0(x)\to P_1(x)}\ \forall\mathbf{E}}{P_1(x)}\ \to\mathbf{E}}{\forall x P_1(x)}\ \forall\mathbf{T}$$

□

2.11.5 Tehtävät

Tehtävä 238 *Anna luonnollinen päättely lauseelle "Jos jokainen on väsynyt ja iloinen niin jokainen on väsynyt ja jokainen on iloinen."*

Tehtävä 239 *Päättele kaava $\forall x R_0(x, x)$ kaavasta $\forall x \forall y R_0(x, y)$.*

Tehtävä 240 *Päättele kaava $\neg\forall x P_0(x)$ kaavasta $\forall x \neg P_0(x)$.*

Tehtävä 241 *Onko tämä korrekti päättely:*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x R_0(x,y)}{R_0(z,y)}\ \forall\mathbf{E}}{\forall y R_0(z,y)}\ \forall\mathbf{T}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_0 \land P_2(x)]}{P_0(x)}\,{\scriptstyle \land \mathbf{E}} \qquad \dfrac{\forall x(P_0(x) \to (P_1(x) \lor \neg P_2(x)))}{P_0(x) \to (P_1(x) \lor \neg P_2(x)))}\,{\scriptstyle \forall \mathbf{E}}}{P_1(x) \lor \neg P_2(x)}\,{\scriptstyle \to \mathbf{E}} \qquad [P_1(x)] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P_0(x) \land P_2(x)]}{P_2(x)}\,{\scriptstyle \land \mathbf{E}} \quad [\neg P_2(x)]}{P_2(x) \land \neg P_2(x)}\,{\scriptstyle \land \mathbf{T}}}{\neg\neg P_1(x)}\,{\scriptstyle \neg \mathbf{T}}}{P_1(x)}\,{\scriptstyle \neg \mathbf{E}}}{\dfrac{\dfrac{P_1(x)}{(P_0(x) \land P_2(x)) \to (x))}\,{\scriptstyle \to \mathbf{T}}}{\forall x((P_0(x) \land P_2(x)) \to P_1(x)))}\,{\scriptstyle \forall \mathbf{T}}}\,{\scriptstyle \lor \mathbf{E}}
$$

Kuva 2.14: Esimerkki.

Tehtävä 242 *Onko tämä korrekti päättely:*

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P_0(x)}{P_0(x)}\,{\scriptstyle \forall \mathbf{E}} \qquad \dfrac{\forall x P_1(x)}{P_1(y)}\,{\scriptstyle \forall \mathbf{E}}}{P_0(x) \land P_1(y)}\,{\scriptstyle \land \mathbf{T}}}{\forall x(P_0(x) \land P_1(y))}\,{\scriptstyle \forall \mathbf{T}}}{\forall y \forall x(P_0(x) \land P_1(y))}\,{\scriptstyle \forall \mathbf{T}}
$$

2.12 Lisää luonnollista päättelyä

Olemme oppineet universaalikvanttorin säännöt. Nyt opimme eksistenssikvanttorin säännöt, predikaattilogiikan luonnollisen päättelyn viimeiset säännöt.

2.12.1 Eksistenssikvanttorin säännöt

Eksistenssikvanttorin tuonti- ja eliminointisäännöt ovat:

$\exists$-Eliminointisääntö: x ei saa esiintyä vapaana B:ssä tai B:n johdossa tehdyissä hylkäämättömissä oletuksissa, paitsi ehkä A:ssa.

$$
\dfrac{\exists x A \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}\,{\scriptstyle \exists \mathbf{E}}
$$

$\exists$-Tuontisääntö: Termin t pitää olla vapaa muuttujalle x A:ssa:

$$
\dfrac{A(t/x)}{\exists x A}\,{\scriptstyle \exists \mathbf{T}}
$$

Miettikäämme näiden sääntöjen perusteluita. $\exists$-eliminointisäännön peruste on seuraava: $\exists x A$:n intuitiivinen merkitys on, että jokin alkio a (mallin) universumissa toteuttaa A:n, kun sitä käytetään x:n arvona. Toisaalta voimme johtaa B:n joka ei liity x:ään mitenkään, oletuksesta A. Eli, B on totta, riippumatta x:n arvosta, kuhan A on tosi. Tiedämme, että A on tosi, kun x on yhtä kuin a, joten B on tosi.

Ottakaamme hyvin arkipäiväinen esimerkki: Oletetaan, että joku tykkää jazzista ja pitäkäämme faktana, että kaikki jotka tykkäävät jazzista tykkäävät musiikista. Jazzista tykkäävä henkilö on nyt x. Kun yhdistämme tämän oletuksella, että kaikki jotka tykkäävät jazzista tykkäävät musiikista, voimme päätellä että x tykkää musiikista. Eli on joku joka tykkää musiikista.

$$
\dfrac{\begin{matrix}\text{Joku} \\ \text{tykkää} \\ \text{jazzista}\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}x \\ \text{tykkää} \\ \text{jazzista}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{Kaikki} \\ \text{jotka tykkäävät} \\ \text{jazzista} \\ \text{tykkäävät musiikista} \\ \text{...}\end{matrix}}{\begin{matrix}\text{...} \\ \text{Joku} \\ \text{tykkää} \\ \text{musiikista}\end{matrix}}}{\text{Joku tykkää musiikista}}
$$

Tarkemmin, olettakaamme, että s toteuttaa $\exists x A$:n ja myös oletukset jotka tehtiin kun johdettiin B A:sta. Voimme nyt osoittaa, että s toteuttaa myös B:n. On olemassa a siten, että $s(a/x)$ toteuttaa A:n. Näin ollen $s(a/x)$ toteuttaa kaikki oletukset jotka tehtiin kun B johdettiin A:sta.

Näin ollen $s(a/x)$ toteuttaa B:n. Muista, että x ei ole vapaa B:ssä. Eli koska $s(a/x)$ toteuttaa B:n, niin myös s toteuttaa B:n.

$\exists$-Tuontisäännön peruste on seuraava: Tiedämme $A(t/x)$:n. Eli tiedämme, että ainakin yksi x:n arvo toteuttaa A:n, nimittäin termi t. Joten on perusteltua päätellä $\exists x A$.

Tarkemmin, jos $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$, niin silloin sijoituslemman nojalla, $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ kun $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Erityisesti, $\mathcal{M} \models_s \exists x A$.

Ilman rajoitusta $\exists$-eliminointisäännossä saisimme seuraavan väärän päättelyn:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x P_0(x) \quad [P_0(x)]}{P_0(x)}\;\exists\,\mathbf{E}}{\forall x P_0(x)}\;\forall\,\mathbf{T}$$

Tällä väärällä päättelyllä sellaiset epäloogiset lauseet, kuten: “Jos jotkut laatat ovat punaisia, niin kaikki laatat ovat punaisia”, olisivat loogisesti valideja.

Toisaalta ilman rajoitusta $\exists$-tuontisäännössä saisimme seuraavan väärän päättelyn:

$$\dfrac{\forall x \neg P_0(x,x)}{\exists z \forall x \neg P_0(z,x)}\;\exists\,\mathbf{T}$$

Tällä väärällä päättelyllä saisimme aivan vääriä tuloksia kuten: “Jos mikään solmu ei ole itsensä naapuri niin joillain solmuilla ei ole naapureita.”

2.12.2 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 243 *Päättelemme kaavan $\exists x R_0(x,y)$ kaavasta $\exists z R_0(z,y)$.*

Ratkaisu:

$$\dfrac{\exists x R_0(x,y) \quad \dfrac{[R_0(x,y)]}{\exists z R_0(z,y)}\;\exists\,\mathbf{T}}{\exists z R_0(z,y)}\;\exists\,\mathbf{E}$$

□

Tehtävä 244 *Kaavan $\exists y \exists x (R_0(x,y) \vee R_1(y,z))$ päättely kaavasta $\forall x \forall y (R_0(x,y) \vee R_1(y,z))$.*

Ratkaisu: Seuraavassa päättelyssä voimme havaita, että x on aina vapaa muuttujalle x ja, että y on aina vapaa muuttujalle y:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R_0(x,y) \vee R_1(y,z))}{\forall y (R_0(x,y) \vee R_1(y,z))}\;\forall\,\mathbf{E}}{R_0(x,y) \vee R_1(y,z)}\;\forall\,\mathbf{E}}{\exists x (R_0(x,y) \vee R_1(y,z))}\;\exists\,\mathbf{T}}{\exists y \exists x (R_0(x,y) \vee R_1(y,z))}\;\exists\,\mathbf{T}$$

□

Tehtävä 245 *Todista, että jos joku on kaikkien kaveri niin kaikilla on kaveri.*

Ratkaisu: Syy miksi väite pätee on seuraava: Ottakaamme x ja olettakaamme, että se on kaikkien kaveri. Ottakaamme joku y. Oletuksen nojalla x on y:n kaveri. Täten y:llä on kaveri, nimittäin x.

Nyt meidän täytyy kirjoittaa tämä luonnolliseen päättelyyn. Toisin sanoen meidän täytyy johtaa kaava $\forall y \exists x R_0(x,y)$ kaavasta $\exists x \forall y R_0(x,y)$.

$$\dfrac{\exists x \forall y R_0(x,y) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y R_0(x,y)]}{R_0(x,y)}\;\forall\,\mathbf{E}}{\exists x R_0(x,y)}\;\exists\,\mathbf{T}}{\forall y \exists x R_0(x,y)}\;\forall\,\mathbf{T}}{\forall y \exists x R_0(x,y)}\;\exists\,\mathbf{E}$$

□

2.12.3 Tehtävät

Tehtävä 246 *Todista seuraava lause käyttäen luonnollista päättelyä: Jos joku on iloinen miljonääri niin joku on iloinen.*

Tehtävä 247 *Todista käyttäen luonnollista päättelyä kaava*

$$\forall x \exists y R_0(x,y) \wedge \forall x \exists y R_1(x,y)$$

kaavasta

$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \wedge R_1(x,y)).$$

Tehtävä 248 *Todista seuraava kaava käyttäen luonnollista päättelyä:*

$$\exists x \forall y R_0(x,y) \vee \forall x \exists y \neg R_0(x,y).$$

Tehtävä 249 *Todista seuraava kaava käyttäen luonnollista päättelyä:*

$$\forall x \exists y R_0(x,y) \vee \exists x \neg \exists y R_0(x,y).$$

Tehtävä 250 *Todista seuraava kaava käyttäen luonnollista päättelyä:*

$$\forall x \exists y (R_0(x,y) \wedge R_1(y,x)) \to \forall u \exists v (R_0(u,v) \vee R_1(v,u)).$$

Tehtävä 251 *Todista seuraava hämmästyttävä lause käyttäen luonnolista päättelyä: On olemassa henkilö siten, että jos kyseinen henkilö on humalassa niin kaikki ovat humalassa. Vihje: Lause joka pitää todistaa on:*

$$\exists x (P_0(x) \to \forall x P_0(x)).$$

2.13 Luonnollinen päättely – Kertaus

Voimme nyt koota kaikki tuonti- ja eliminointisäännöt, mitä olemme oppineet konnektiiveista ja kvanttoreista, yhteen tauluun, katso Kuva 2.15.

2.13.1 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 252 *Johda kaava $\forall x \neg A$ kaavasta $\neg \exists x A$.*

Ratkaisu: Idea: Olettakaamme, että ei pidä paikkansa, että on joitain x jotka toteuttavat A:n. Joten A kertoo jotain ristiriitaista muuttujasta x kuten, että x on pieni ja iso, punainen ja ei punainen tai jotain muuta vastaavaa.

No miten voimme todistaa, että muuttuja x:n kaikki arvot toteuttavat kaavan $\neg A$. Otamme mielivaltaisen x:n ja todistamme $\neg A$:n käyttämällä $\neg$-Tuontisääntöä. Eli oletamme A:n ja johdamme siitä ristiriidan.

Loppu on helppoa. A:sta seuraa $\exists x A$ $\exists$-Tuontisäännön nojalla. Ja nyt tämä on ristiriidassa oletuksen $\neg \exists x A$ kanssa.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg \exists x A \quad \dfrac{[A]}{\exists x A}\ \exists\,\mathbf{T}^{1)}}{\exists x A \wedge \neg \exists x A}\ \wedge\,\mathbf{T}}{\neg A}\ \neg\,\mathbf{T}}{\forall x \neg A}\ \forall\,\mathbf{T}^{2)}$$

1) x on vapaa muuttujalle x.

2) Muuttuja x ei esiinny vapaana kaavassa $\neg \exists x A$ joka on ainoa hylkäämätön oletus $\neg A$:n johdossa. □

Tehtävä 253 *Käytä edellistä ratkottua tehtävää johtaaksesi $\exists x A$ lauseesta $\neg \forall x \neg A$.*

Ratkaisu: Idea: Olettakaamme, että ei ole totta, että jokainen x ei toteuta A:ta. Joten ei ole totta, että A kertoo jotain niin ristiriitaista muuttujasta x, että se ei koskaan toteuta A:ta.

Miten voimme todistaa, että jokin x toteuttaa lauseen A? Meidän töytyy vetää jokin x “hihasta”. Emme voi johtaa sitä suoraan joten joudumme johtamaan sen epäsuorasti. Oletamme lauseen $\neg \exists x A$ ja johdamme siitä ristiriidan.

Käytämme edellistä Ratkottua tehtävää. Siinä näytimme miten voimme johtaa lauseen $\forall x \neg A$ lauseesta $\neg \exists x A$. Tämä on ristiriidassa olettamamme lauseen kanssa: $\neg \forall x \neg A$. Olemme valmiita!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg \forall x \neg A \quad \begin{array}{c}[\neg \exists x A] \\ \vdots \\ \forall x \neg A\end{array}}{\forall x \neg A \wedge \neg \forall x \neg A}\ \wedge\,\mathbf{T}}{\neg\neg \exists x A}\ \neg\,\mathbf{T}}{\exists x A}\ \neg\,\mathbf{E}$$

□

2.13.2 Tehtävät

Tehtävä 254 **(a)** *Onko tämä korrekti päättely:*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x R_0(x,y)}{R_0(z,y)}\ \forall\,\mathbf{E}}{\forall y R_0(z,y)}\ \forall\,\mathbf{T}$$

Konnektiivi	Tuonti	Eliminointi
Konjunktio	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge\mathbf{T}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\ \wedge\mathbf{E}$
Disjunktio	$\dfrac{A}{A \vee B}\ \vee\mathbf{T} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\ \vee\mathbf{T}$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \vee\mathbf{E}$
Implikaatio	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\ \rightarrow\mathbf{T}$	$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ \rightarrow\mathbf{E}$
Ekvivalenssi	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ A\end{array}}{A \leftrightarrow B}\ \leftrightarrow\mathbf{T}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$
Negaatio	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}\ \neg\mathbf{T}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\mathbf{E}$
Universaalikvanttori	$\dfrac{A}{\forall x A}\ \forall\mathbf{T}$ x ei saa olla vapaa missään A:n johtamisessa tehdyssä oletuksessa	$\dfrac{\forall x A}{A(t/x)}\ \forall\mathbf{E}$ t:n pitää olla vapaa muuttujalle x A:ssa
Eksistenssikvanttori	$\dfrac{A(t/x)}{\exists x A}\ \exists\mathbf{T}$ t:n pitää olla vapaa muuttujalle x A:ssa	$\dfrac{\exists x A \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{B}\ \exists\mathbf{E}$ x ei saa olla vapaa B:ssä tai missään B:n johtaessa tehdyssä oletuksessa

Kuva 2.15: Luonnollisen päättelyn säännöt.

(b) *Onko tämä korrekti päättely:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x P_0(x)}{P_0(x)}\,\forall\mathbf{E} \quad \cfrac{\forall x P_1(x)}{P_1(x)}\,\forall\mathbf{E}}{P_0(x) \wedge P_1(y)}\,\wedge\mathbf{T}}{\forall x (P_0(x) \wedge P_1(y))}\,\forall\mathbf{T}}{\forall y \forall x (P_0(x) \wedge P_1(y))}\,\forall\mathbf{T}$$

Tehtävä 255 *Johda lause* $\neg\forall x P_0(x)$ *lauseesta* $\forall x \neg P_0(x)$.

Tehtävä 256 *Anna luonnollinen päättely lauseelle* $\forall x P_1(x)$ *lauseista* $\forall x P_0(x)$ *ja* $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.

Tehtävä 257 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\neg(\forall x P_0(x) \wedge \exists x \neg P_0(x)).$$

Tehtävä 258 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall y \exists x \neg R_0(x, y) \to \exists x \exists y \neg R_0(x, y).$$

Tehtävä 259 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \forall y (R_0(x, y) \wedge R_1(x, y)) \to \forall x R_0(x, x).$$

Tehtävä 260 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \forall y (R_0(x, y) \wedge \neg R_1(x, y)) \to \exists x \forall y \neg R_1(x, y).$$

Tehtävä 261 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\exists z (\exists x \neg (R_0(x, x) \vee R_1(x, x)) \to \exists y \neg R_0(z, y)).$$

Tehtävä 262 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \neg P_0(x) \to \neg \exists x P_0(x).$$

Tehtävä 263 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\exists x \neg P_0(x) \to \neg \forall x P_0(x).$$

Tehtävä 264 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \forall y R_0(x, y) \to \exists x \forall y R_0(x, y).$$

Tehtävä 265 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \forall y R_0(x, y) \to \exists x \exists y R_0(x, y).$$

Tehtävä 266 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \forall y R_0(x, y) \to \forall y \forall x R_0(x, y).$$

Tehtävä 267 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\exists x \exists y R_1(x, y) \to \exists x \exists y (R_0(x, y) \to R_1(x, y)).$$

Tehtävä 268 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\exists x \exists y \neg R_0(x, y) \to \exists x \exists y (R_0(x, y) \to R_1(x, y)).$$

Tehtävä 269 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\forall x \forall y R_1(x, y) \to \forall x \forall y (R_0(x, y) \to R_1(x, y)).$$

Tehtävä 270 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\neg(\exists x \neg P_0(x) \wedge \forall x P_0(x)).$$

Tehtävä 271 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\neg(\neg \exists x P_0(x) \wedge \neg \forall x \neg P_0(x)).$$

Tehtävä 272 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\neg \exists x \neg P_0(x) \vee \neg \forall x P_0(x).$$

Tehtävä 273 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\exists x P_0(x) \vee \forall x \neg P_0(x).$$

Tehtävä 274 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\neg \forall x \forall y R_0(x, y) \vee \forall x R_0(x, x).$$

Tehtävä 275 *Käytä luonnollista päättelyä todistaaksesi seuraava lause:*

$$\neg \exists x R_0(x, x) \vee \exists x \exists y R_0(x, y).$$

2.14 Eheys

Luonnollisen päättelyn säännöt eivät ole mielivaltaisia, vaan ne on valittu tarkasti siten, että ne parhaiten kuvastaisivat päätöstentekoprosessia jota käytämme joka päivä arkikielessä ja tieteessä. Kvanttorien säännöt taas ovat juuri sellaiset kuin ne ovat, koska näin me käytämme kvanttoreita – näin me ymmärrämme ne. Tämän näkee jo pelkästään katsomalla näitä sääntöjä. Mutta tämä voidaan myös todistaa ja tätä todistusta kutsutaan Eheyslauseeksi.

Mutta miten me voimme mitenkään todistaa, että luonnollisen päättelyn säännöt matkivat meidän arkikieltämme? Se on todellakin mahdollista ainakin jollakin tarkkuustasolla ja tämä tarkkuus tulee käsitteestä "kaavaan toteutus mallissa". Voimme todistaa seuraavan: kaikki mitä voimme johtaa kaavasta A käyttämällä luonnollisen päättelyn sääntöjä on jokaisessa mallissa jokaisen tulkintafunktion toteutettama kunhan tämä tulkintafunktio toteuttaa A:n kyseisessä mallissa. Eli jos toteutuksen käsitteemme $\mathcal{M} \models_s A$ oikein heijastaa ideamme totuudesta, niin silloin Eheyslause näyttää, että luonnollisen päättelyn säännöt johtavat totuuteen ja ovat täten "eheitä".

Eheyslauseen pääkäyttö on kuitenkin osoittaa, että joitakin lauseita on mahdotonta todistaa. Ottakaamme yksinkertainen esimerkki: On intuitiivisesti selvää, että emme voi johtaa lausetta $\forall x P_0(x)$ lauseesta $\exists x P_0(x)$. Mutta ongelma piilee siinä, kun tämä pitäisi todistaa aukottomasti. Kun meillä on Eheyslause käytettävänä, meidän täyttyy vain rakentaa malli missä $\exists x P_0(x)$ on tosi, mutta $\forall x P_0(x)$ on epätosi. Tämä riittää.

2.14.1 Eheys

Luonnollisen päättelyn eheys predikaattilogiikassa tarkoittaa, että päättelyt kunnioittavat totuutta seuraavalla tavalla: Jos A voidaan johtaa oletuksista $B_1, \ldots, B_n$ ja tulkintafunktio s toteuttaa kaavat $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$, niin silloin s myös toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$. Se, että A voidaan johtaa $B_1, \ldots, B_n$:stä, tarkoittaa luonnollisen päättelyn olemassa oloa jossa $B_1, \ldots, B_n$ on oletuksena ja A on johtopäätös. Joten meidän pitää katsoa kaikkia vastaavia päättelyjä. Päättelyt koostuvat pienistä askelista jotka ovat sääntöjä: konnektiivien ja kvanttoreiden sääntöjä. Ideana on, että näytämme, että totuus – tai pikemminkin toteutus tulkintafunktion kautta jossain mallissa – säilyy jokaisessa askeleessa. Totuus – tai toteutus – ikään, kuin "virtaa" oletuksista askel kerrallaan kunnes se päätyy päättelyyn. Tämä on aivan sama asia, kuin induktiivinen todistus aritmetiikassa. Jos tiedämme, että $f(0)$ on parillinen ja näytämme, että jos $f(n)$ on parillinen niin kaikilla n arvoilla $f(n+1)$ on myös parillinen, niin tiedämme, että $f(100)$ on parillinen, koska voimme ajatella että $f(0)$ on parillinen ja siitä päätellä askel kerrallaan, että $f(100)$ on myös parillinen.

Siis todistamme väitteen: Jos A voidaan luonnollisesti johtaa $B_1, \ldots, B_n$:stä ja tulkintafunktio s toteuttaa $B_1, \ldots, B_n$:n mallissa $\mathcal{M}$, niin silloin s myös toteuttaa A:n mallissa $\mathcal{M}$.

Todistus on "induktiotodistus" luonnollisen päättelyn rakenteen suhteen. Päättely koostuu askelista jotka ovat luonnollisen päättelyn eri sääntöjen käyttöä. Aloitamme yksinkertaisista päättelyistä ja päädymme lopulta monimutkaisempiin päättelyihin. Käymme kaikki säännöt läpi ja oletamme, että s toteuttaa sääntöjen oletukset mallissa $\mathcal{M}$, ja osoitamme, että se toteuttaa myös johtopäätöksen. Monet askeleet ovat täysin triviaaleja, mutta tämän ei pitäisi estää meitä. Tämän todistustavan ideana on kaikkien pienten askelten yhteinen vaikutus. Yksittäiset askeleet saattavat olla triviaaleja, mutta lopullinen päättely ei ole.

Lyhimmässä mahdollisessa päättelyssä on joitain oletettuja kaavoja $B_1, \ldots, B_n$ joista yksi, B_i, on johtopäätös. Väite, että mikä tahansa tulkintafunktio s joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ myös toteuttaa johtopäätöksen B_i, on automaattisesti totta.

Tarkastelemme nyt päättelyä jossa on oletukset B_1, ..., B_n ja teemme Induktio-oletuksen: Kaikki pienemmät päättelyt toteuttavat väitteen, totuusjakauma s joka toteuttaa päättelyn oletukset toteuttaa myös johtopäätöksen. Mitä "pienemmät" päättelyt tarkoittaa? Luotamme siihen intuitiiviseen määritelmään, että pienemmässä päättelyssä on vähemmän sääntöjä.

2.14.2 Konjunktio

$\wedge$-Tuontisääntö:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathbf{T}$$

Olettakaamme että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletamme, että $\mathcal{M} \models_s$

A ja, että $\mathcal{M} \models_s B$. Näytämme, että $\mathcal{M} \models_s A \wedge B$. Mutta tämä on triviaalia!

$\wedge$-Eliminointisääntö:

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathbf{E} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathbf{E}$$

Olettakaamme että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletamme, että $\mathcal{M} \models_s A \wedge B$. Näytämme, että $\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$. Mutta tämä on triviaalia!

2.14.3 Disjunktio

$\vee$-Tuontisääntö:

$$\frac{A}{A \vee B} \vee \mathbf{T} \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee \mathbf{T}$$

Olettakaamme että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletamme, että $\mathcal{M} \models_s A$. Näytämme, että $\mathcal{M} \models_s A \vee B$. Mutta tämä on triviaalia. Myös jos oletamme, että $\mathcal{M} \models_s B$, niin triviaalisti $\mathcal{M} \models_s A \vee B$.

$\vee$-Eliminointisääntö:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C} \vee E$$

Olettakaamme, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletamme, että $\mathcal{M} \models_s A \vee B$. Induktio-oletuksen nojalla C:n johto A:sta ja C:n johto B:stä ovat eheitä, eli jos s' on jokin tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$, mallissa $\mathcal{M}$, ja lisäksi $\mathcal{M} \models_{s'} A$, niin silloin $\mathcal{M} \models_{s'} C$, ja jos $\mathcal{M} \models_{s'} B$, niin silloin $\mathcal{M} \models_{s'} C$ oli s' mikä tahansa. Eli näytämme $\mathcal{M} \models_s C$. Mutta oletuksesta $\mathcal{M} \models_s A \vee B$ seuraa $\mathcal{M} \models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$. Kummassakin tapauksessa me tiedämme, että $\mathcal{M} \models_s C$ pätee.

2.14.4 Implikaatio

$\rightarrow$-Eliminointisääntö:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow \mathbf{E}$$

Olettakaamme, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Olettakaamme, että $\mathcal{M} \models_s A \rightarrow B$ ja $\mathcal{M} \models_s A$. On näytettävä, että $\mathcal{M} \models_s B$. Tämä on triviaalia!

$\rightarrow$-Tuontisääntö:

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow \mathbf{T}$$

Olettakaamme, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Induktio-oletuksen nojalla B:n johto A:sta on eheä eli jos s' on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$:n, ja lisäksi $\mathcal{M} \models_{s'} A$, niin silloin $\mathcal{M} \models_{s'} B$, oli s' mikä tahansa. Todistamme, että $\mathcal{M} \models_s A \rightarrow B$. Tapaus 1: $\mathcal{M} \models_s A$ ei päde. Selvä! Tapaus 2: $\mathcal{M} \models_s A$. Oletuksestamme seuraa, että $\mathcal{M} \models_s B$. Siis $\mathcal{M} \models_s A \rightarrow B$.

2.14.5 Ekvivalenssi

Jätämme väitteen muotoilun ja todistamisen harjoitustehtäväksi.

2.14.6 Negaatio

$\neg$-Tuontisääntö:

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A} \neg \mathbf{T}$$

Olettakaamme, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Induktio-oletuksen nojalla $B \wedge \neg B$:n päättely A:sta on eheä eli jos s' toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$, ja lisäksi jos $\mathcal{M} \models_{s'} A$, niin silloin $\mathcal{M} \models_{s'} B \wedge \neg B$. Mutta $\mathcal{M} \models_{s'} B \wedge \neg B$ ei voi koskaan päteä. Joten $\mathcal{M} \models_s A$ on epätosi. Eli $\mathcal{M} \models_s \neg A$ on tosi. Huomaa, että tämä ei tarkoita että $\mathcal{M} \not\models_s A$ kaikille s arvoille vain, että $\mathcal{M} \not\models_s A$ niille s arvoille jotka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$.

$\neg$-Eliminointisääntö:

$$\frac{\neg\neg A}{A} \neg \mathbf{E}$$

Oletamme, että s tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletamme, että $\mathcal{M} \models_s \neg\neg A$. Näytämme, että $\mathcal{M} \models_s A$. Selvä!

2.14.7 Kvanttorit

$\forall$-Eliminointisääntö: Termin t pitää olla vapaa muuttujalle x mallissa A:

$$\frac{\forall x A}{A(t/x)}\ \forall\mathbf{E}$$

Oletetaan, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletetaan myös, että $\mathcal{M} \models_s \forall x A$. Tällöin mille tahansa mallin $\mathcal{M}$ a:lle $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ pätee, varsinkin jos $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Sijoituslemman nojalla $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$.

$\forall$-Tuontisääntö: Muuttuja x ei saa esiintyä vapaana missään A:n päättelyssä tehdyssä oletuksessa.

$$\frac{A}{\forall x A}\ \forall\mathbf{T}$$

Olettakaamme, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Olettakaamme myös, että s toteuttaa kaikki hylkäämättömät oletukset jotka tehtiin A:ta johtaessa. Nyt kaikilla a mallissa $\mathcal{M}$, modifioitu tulkintafunktio $s(a/x)$ toteuttaa nuo oletukset koska x ei ole vapaa niissä (tämä tarvitsee yksinkertaisen todistuksen, mutta se sivutetaan). Induktio-oletuksen nojalla, $s(a/x)$ toteuttaa A:n. Koska a oli mielivaltainen, s toteuttaa myös $\forall x A$:n.

$\exists$-Eliminointisääntö: Muuttuja x ei saa esiintyä vapaana B:ssä tai missään oletuksessa joka tehtiin kun B:tä johdettiin, paitsi ehkä A:ssa.

$$\frac{\exists x A \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}\ \exists\mathbf{E}$$

Oletetaan, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Oletetaan myös, että s toteuttaa $\exists x A$:n ja tilapäiset oletukset joita tehtiin kun B johdettiin A:sta. Väitämme, että s:n täytyy toteuttaa myös B. On olemassa a siten, että $s(a/x)$ toteuttaa A:n. Täten $s(a/x)$ toteuttaa kaikki oletukset jotka tehtiin kun B johdettiin A:sta. Induktio-oletuksen nojalla $s(a/x)$ toteuttaa B:n. Muista, että x ei ole vapaana B:ssä. Eli koska $s(a/x)$ toteuttaa B:n, niin myös s toteuttaa B:n.

$\exists$-Tuontisääntö: Termin t pitää olla vapaa muuttujalle x mallissa A:

$$\frac{A(t/x)}{\exists x A}\ \exists\mathbf{T}$$

Oletetaan, että s on tulkintafunktio joka toteuttaa oletukset $B_1, \ldots, B_n$ mallissa $\mathcal{M}$. Jos $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$ niin sijoituslemman nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ kun $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Erityisesti kun $\mathcal{M} \models_s \exists x A$.

2.14.8 Eheyslause

Lause 2.20 *Jos predikaattilogiikan kaavalla on luonnollinen päättely niin se on validi. Jos predikaattilogiikan kaavalla A:lla on luonnollinen päättely oletuksista joita tulkintafunktio s toteuttaa mallissa $\mathcal{M}$, niin silloin $\mathcal{M} \models_s A$.*

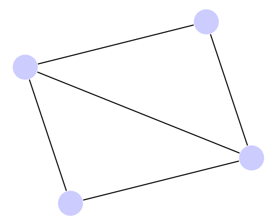
2.14.9 Soveltaminen

Voimme näyttää, että kaavaa B ei voi luonnollisesti päätellä kaavasta A, esittämällä tulkintafunktion s ja mallin $\mathcal{M}$ siten että $\mathcal{M} \models_s A$ pätee mutta $\mathcal{M} \models_s B$ ei päde. Esimerkiksi, jotta voimme näyttää, että kaava $\exists y \forall x R_0(x,y)$ ei ole johdettavissa kaavasta $\forall x \exists y R_0(x,y)$, annamme $M = \{0,1,2,\ldots\}$ ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(m,n) : m \leq n\}$, jolloin $\mathcal{M} \models \forall x \exists y R_0(x,y)$ ja $\mathcal{M} \not\models \exists y \forall x R_0(x,y)$.

2.14.10 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 276 *Todista, että lauseesta "jokaisella solmulla on naapuri joka on jokaisen toisen solmun naapuri" ei voida johtaa lausetta "jokainen solmu on jokaisen toisen solmun naapuri".*

Ratkaisu: Oletus on $\forall x \exists y (xEy \wedge \forall z(\neg y = z \to yEz))$ ja johtopäätös on $\forall y \forall z(\neg y = z \to yEz)$. Nyt meidän täytyy todistaa, että lauseelle $\forall y \forall z(\neg y = z \to yEz))$ ei ole olemassa luonnollista päättelyä lauseesta $\forall x \exists y (xEy \wedge \forall z(\neg y = z \to yEz))$. Antakaamme $\mathcal{G}$:n olla seuraava verkko. On helppo näyttää, että oletus pätee verkossa $\mathcal{G}$, mutta johtopäätös ei päde.



□

Tehtävä 277 *Olettakaamme, että jokainen punainen laatta on jokaisen sinisen laatan vasemmalla puolella. Olettakaamme myös, että jokainen sininen laatta on jokaisen keltaisen laatan vasemmalla puolella. Näytä, että emme voi johtaa tästä, että jokainen punainen laatta on jokaisen keltaisen laatan vasemmalla puolella.*

Ratkaisu: Oletukset ovat $\forall x(R(x) \to \forall y(B(y) \to x < y))$ ja $\forall x(B(x) \to \forall y(Y(y) \to x < y))$. Johtopäätös on $\forall x(R(x) \to \forall y(Y(y) \to x < y))$.

Ongelma on näyttää, että lausetta $\forall x(R(x) \to \forall y(Y(y) \to x < y))$ ei voi johtaa lauseista $\forall x(R(x) \to \forall y(B(y) \to x < y))$ ja $\forall x(B(x) \to \forall y(Y(y) \to x < y))$. Antakaamme $\mathcal{M}$ olla laattamalli jossa ei ole yhtään sinista laattaa ja jossa jokainen keltainem laatta on jokaisen punaisen laatan vasemmalla puolella. Tällöin oletukset pätevät, mutta johtopäätös ei päde. □

Tehtävä 278 *Seuraavat kaavat ovat nimeltään ekvivelanssirelaation aksioomat:*

1. $\forall x \forall y(x \equiv y \to y \equiv x)$ *(Symmetrisyyden aksiooma)*
2. $\forall x(x \equiv x)$ *(Refleksiivisyyden aksiooma)*
3. $\forall x \forall y \forall z((x \equiv y \wedge y \equiv z) \to x \equiv z)$ *(Transitiivisuuden aksiooma)*

Johda lause $\forall x \forall y \forall z((x \equiv y \wedge z \equiv y) \to x \equiv z)$ ekvivelanssirelaation aksioomista.

Ratkaisu: Katso Kuva 2.16.

□

2.14.11 Tehtävät

Tehtävä 279 *Näytä, että seuraava päättely ei ole korrekti: Olettakaamme, että jokainen päivä joka ei ole sateinen ei ole tuulinen, ja joku päivä ei ole tuulinen. Silloin jokainen päivä on sateinen.*

Tehtävä 280 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\exists x \neg P_0(x) \to \neg \exists x P_0(x)$$

Tehtävä 281 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\neg \forall x P_0(x) \to \forall x \neg P_0(x)$$

Tehtävä 282 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\forall x(P_0(x) \vee P_1(x)) \to \forall x P_0(x) \vee \forall x P_1(x)$$

Tehtävä 283 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$(\exists x P_0(x) \wedge \exists x P_1(x)) \to \exists x(P_0(x) \wedge P_1(x))$$

Tehtävä 284 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\exists x(P_0(x) \vee P_1(x)) \to \exists x P_0(x)$$

Tehtävä 285 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\forall z(\forall x R_0(x,x) \to \forall y R_0(z,y))$$

Tehtävä 286 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\exists x \forall y R_0(x,y) \to \forall x \exists y R_0(x,y)$$

Tehtävä 287 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\forall x \exists y R_0(x,y) \to \exists x \forall y R_0(x,y)$$

Tehtävä 288 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\forall x R_0(x,x) \to \forall x \forall y R_0(x,y)$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x\forall y\forall z((x\equiv y\wedge y\equiv z)\to x\equiv z)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$\forall y\forall z((x\equiv y\wedge y\equiv z)\to x\equiv z)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$\forall z((x\equiv y\wedge y\equiv z)\to x\equiv z)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$(x\equiv y\wedge y\equiv z)\to x\equiv z$}
\AxiomC{$\forall x\forall y(x\equiv y\to y\equiv x)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$\forall y(z\equiv y\to y\equiv z)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$z\equiv y\to y\equiv z$}
\AxiomC{$[x\equiv y\wedge z\equiv y]$}
\RightLabel{$\wedge\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$z\equiv y$}
\RightLabel{$\to\mathbf{E}$}
\BinaryInfC{$y\equiv z$}
\AxiomC{$[x\equiv y\wedge z\equiv y]$}
\RightLabel{$\wedge\,\mathbf{E}$}
\UnaryInfC{$x\equiv y$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{E}$}
\BinaryInfC{$x\equiv y\wedge y\equiv z$}
\RightLabel{$\to\mathbf{E}$}
\BinaryInfC{$x\equiv z$}
\RightLabel{$\to\mathbf{T}$}
\UnaryInfC{$(x\equiv y\wedge z\equiv y)\to x\equiv z$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{T}$}
\UnaryInfC{$\forall z((x\equiv y\wedge z\equiv y)\to x\equiv z)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{T}$}
\UnaryInfC{$\forall y\forall z((x\equiv y\wedge z\equiv y)\to x\equiv z)$}
\RightLabel{$\forall\,\mathbf{T}$}
\UnaryInfC{$\forall x\forall y\forall z((x\equiv y\wedge z\equiv y)\to x\equiv z)$}
\end{prooftree}
$$

Kuva 2.16: Johtaminen

Tehtävä 289 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\exists x\exists y R_0(x,y)\to\exists x R_0(x,x)$$

Tehtävä 290 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\forall x(P_0(x)\to\forall y P_0(y))$$

Tehtävä 291 *Näytä, että seuraavaa lausetta ei voi johtaa luonnollisella päättelyllä:*

$$\forall x(\exists y R_0(x,y)\to\forall x\exists y R_0(x,y))$$

Tehtävä 292 *Näytä, että seuraava päättely ei ole mahdollista luonnollisella päättelyllä:*

$$\{\forall x(P_0(x)\to P_1(x)),\forall x P_1(x)\}\vdash\forall x P_0(x)$$

Tehtävä 293 *Näytä, että seuraava päättely ei ole mahdollista luonnollisella päättelyllä:*

$$\{\forall x(\neg P_1(x)\to\neg P_0(x)),\forall x P_1(x)\}\vdash\forall x P_0(x)$$

Tehtävä 294 *Näytä, että seuraava päättely ei ole mahdollista luonnollisella päättelyllä:*

$$\{\forall x(P_0(x)\to P_1(x)),\exists x P_0(x)\}\vdash\forall x P_1(x)$$

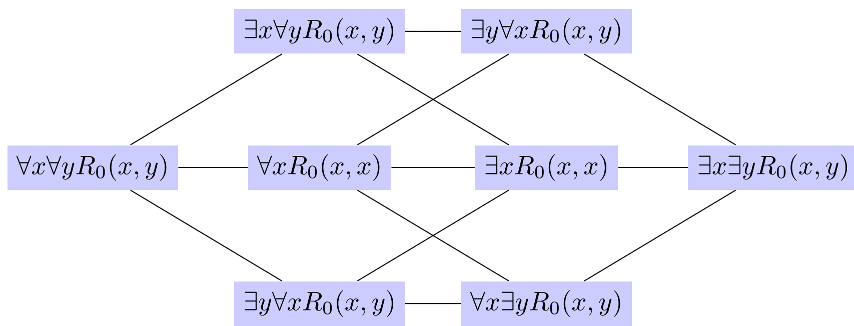
Tehtävä 295 *Tämä on projekti enemmän kuin tehtävä. Todista luonnollisen päättelyn nojalla kaikki implikaatiot vasemmalta oikealle Kuvassa 2.17. Näytä, että näitä impliaatioita ei voi kääntää ja, että mikään muu implikaatio ei päde.*

2.15 Aksioomat ja teoriat

Logiikka, oli se propositiologiikkaa tai predikaattilogiikkaa, yrittää hahmottaa mitä tarkoittaa “olla tosi” jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, mallissa tai totuusjakaumassa. Useimmissa tapauksissa emme ole kiinnostuneita totudesta todella jokaisessa mallissa, vaan totuudesta tietyn tyyppississä malleissa. Lauseet jotka kuvailevat niitä malleja mistä olemme kiinnostuneet ovat nimeltään aksioomia. Kokoelma aksioomia on nimeltään teoria. Esimerkkejä teorioista on:

- Verkkoteoria
- Ryhmäteoria
- Järjestyksen teoria

Aksioomat ja teoriat erottavat ne mallit mistä olemme kiinnostuneet niistä malleista joista emme ole. Ne julistavat joitain perusoletuksia joita voimme käyttää päättelyissämme. Matematiikassa on monia eri aksiomeja, esimerkiksi algebrassa (ryhmät, renkaat, kunnat, vektoriavaruudet jne.) ja topologiassa (topologinen avaruus, metrinen avaruus, Hausdorffin avaruus, jne.) Myös lukuteorialla on omat aksioomat. Geometrialla on omat askioomansa, jotka Euclid vahvisti yli 2000 vuotta sitten. Newton taas sääti liikkeen aksioomat fysiikassa. Aksioomia on joka paikassa tieteessä, mutta niillä on erikoinen merkitys matematiikassa, koska matematiikassa ei ole kokeita, vai onko?



Kuva 2.17: Kahden kvanttorin implikaatioita.

2.15.1 Identiteettiaksioomat

Identiteetti on niin yksinkertainen asia, että sitä on vaikea kuvitella teoriana. Mutta jotta voimme tehdä päätelmiä identiteetistä, tarvitsemme jonkinlaisia aksioomia. Seuraavat identiteettiä koskevat kaavat ovat valideja:

I1 $\forall x\, x = x$

I2 $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$

I3 $\forall x \forall y \forall z ((x = y \land y = z) \to x = z)$

I4 $\forall x \forall y ((x = y \land P_n(x)) \to P_n(y))$

I5 $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \land x' = y' \land R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$

Nämä ovat identiteettiaksioomat. Ne muodostavat Identiteetin teorian.

Tässä on muutama muu kaava jotka voidaan johtaa identiteettiaksioomista:

- $\forall x \exists y (x = y)$ (Jokainen on joku)
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n \land A) \to A(y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n)$, kun y_i on vapaa muuttujalle x_i kun $i = 1, \ldots, n$. (Identtiteettiset alkiot voidaan vaihtaa keskenään)
- $\exists x \forall y (x = y) \to \forall x \forall y (x = y)$ (Jos on olemassa vain yksi alkio, niin mitkä tahansa kaksi alkiota ovat samat)
- $\exists x \exists y \forall z (z = x \lor z = y) \to \forall x \forall y \forall z (x = y \lor y = z \lor x = z)$ (Jos on olemassa vain kaksi alkiota, niin kolmesta alkiosta aina kaksi ovat identtiset)

Huomaa, että identiteettiaksioomat on kirjoitettu tietyillä sidotuilla muuttujilla. On mahdollista muuttaa sidottu muuttuja pienellä triviaalilla päättelyllä, esimerkiksi:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x x = x}{y = y}\ \forall\mathbf{E}}{\forall y y = y}\ \forall\mathbf{T}$$

2.15.2 Universumin äärellisyys

Lause $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y (y = x_1 \lor \ldots \lor y = x_n)$ on tosi mallissa jos ja vain jos mallissa on enintään n alkiota. Huomaa, että tästä voidaan johtaa $\forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} (x_1 = x_2 \lor x_1 = x_3 \lor \ldots \lor x_n = x_{n+1})$. Intuitiivinen perustelu: Jos on enintään n alkiota niin silloin jokaisessa $n + 1$ alkion joukossa pitää olla toistoa.

2.15.3 Järjestysaksioomat

Seuraavat ovat järjestysaksioomat:

J1 $\forall x \neg x < x$ (antirefleksiivisyys)

J2 $\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \to x < z)$ (transitiivisyys)

J3 $\forall x \forall y (x < y \lor y < x \lor x = y)$ (yhtenäisyys)

I1	$\forall x\, x = x$
I2	$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
I3	$\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$
I4	$\forall x \forall y((x = y \wedge P_n(x)) \to P_n(y))$
I5	$\forall x \forall x' \forall y \forall y'((x = y \wedge x' = y' \wedge R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$

Kuva 2.18: Identiteettiaksioomat.

J1	$\forall x \neg x < x$	antirefleksiivisyys
J2	$\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$	transitiivisyys
J3	$\forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$	konnektiivisyys

Kuva 2.19: Järjestysaksioomat.

Luonnolliset luvut ja niiden luonnollinen "vähemmän kuin" järjestys, reaaliluvut ja niiden luonnollisen järjestys, ja rationaaliluvut ja niiden luonnollinen järjestys toteuttavat nämä aksioomat.

Seuraavat lauseet ovat todistettavissa järjestysaksioomien avulla

- $\forall x \forall y(x < y \to \neg y < x)$
- $\forall x \forall y \forall z(x < y \to (z < y \vee x < z))$
- $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n) \to \exists x \forall y(x < y \vee x = y)$ (Jos järjestys on ääreliinen niin siinä on pienin alkio).
- $\forall x \forall x'((\forall y(x < y \vee x = y) \wedge \forall y(x' < y \vee x' = y)) \to x = x')$ (Pienin alkio on yksikäsitteinen jos se on olemassa).

2.15.4 Laattamallien aksioomat

Olemme tutkineet monia esimerkkejä laattamalleista. Jotta voimme johtaa jotain laattamalleista, niin tarvitsemme aksioomia, jotka kuvaavat minkälaisia malleja laattamallit ovat. Jokaisella laattamallilla on järjestys tärkeänä osana sen rakennetta, mutta lisäksi meillä on laattojen värit joita pitää myös miettiä. Eli, laattamallien aksioomien pitää ottaa huomioon laattojen järjestys, mutta myös väri. Tässä aksioomat ovat:

T1 $<$ on järjestysrelaatio (Laatat ovat tietyssä järjestyksessä vierekkäin vasemmalta oikealle)

T2 $\forall x \neg(B(x) \wedge R(x))$ (Mikään laatta ei ole sininen ja punainen)

T3 $\forall x \neg(B(x) \wedge Y(x))$ (Mikään laatta ei ole sininen ja keltainen)

T4 $\forall x \neg(R(x) \wedge Y(x))$ (Mikään laatta ei ole punainen ja keltainen)

T5 $\forall x(R(x) \vee B(x) \vee Y(x))$ (Jokainen laatta on punainen, sininen tai keltainen)

Kaikki laattamallit toteuttaa meidän aksioomat. Seuraavat lauseet voidaan todistaa käyttäen näitä aksioomia.

- $\forall x \forall y((R(x) \wedge B(y)) \to (x < y \vee y < x))$ (Jos x on punainen ja y on sininen, niin toinen on toisen vasemmalla puolella.)
- $\forall x(\forall y(R(y) \to y < x) \to (B(x) \vee Y(x)))$ (Jos jokainen punainen laatta on x:n vasemmalla puolella niin silloin x:n täytyy olla sininen tai keltainen)

- $\forall x \forall y((R(x) \wedge B(y)) \rightarrow x < y) \rightarrow \forall x \forall y((B(x) \wedge R(y)) \rightarrow y < x)$ (Jos jokainen punainen laatta on jokaisen sinisen laatan vasemmalla puolella, niin jokainen sininen laatta on jokaisen punaisen laatan oikealla puolella)

Ajattelemme, että laattamalli on äärellinen (koska emme halua tässä kuvitella loputonta määrää laattoja), mutta emme voi ilmaista tätä predikaattilogiikassa.

2.15.5 Verkkoteorian aksioomat

Verkot ovat binäärisiä predikaatteja jotka ovat antirefleksiivisiä ja symmetrisiä. Täten Verkkoteorian aksioomat ovat:

G1 $\forall x \neg x E x$ (antirefleksiivisyys)

G2 $\forall x \forall y(xEy \rightarrow yEx)$ (symmetrisyys)

Kaikki verkot toteuttaa nämä aksioomat. Esimerkkejä lauseista, jotka voidaan johtaa aksiomeista ovat:

- $\exists x \forall y(\neg y = x \rightarrow yEx) \leftrightarrow \exists x \forall y(\neg x = y \rightarrow xEy)$ (Tämä ekvivalenssi sanoo “Joku solmu on kaikkien muiden solmujen naapuri” kahdella eri tavalla.)
- $\forall x \forall y(\neg y = x \rightarrow yEx) \leftrightarrow \forall x \forall y(\neg x = y \rightarrow xEy)$ (Tämä ekvivalenssi sanoo “Kaksi eri solmua ovat naapureita” kahdella eri tavalla.)
- $\forall x \forall y(xEy \rightarrow \neg x = y)$ (Tämä on antirefleksiivisyys aksiooma ekvivalentissa muodossa.)

2.15.6 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 296 *Todista* $\forall x \exists y(x = y)$ *(Jokainen on joku)*

Ratkaisu: Haluamme näyttää, että mikä tahansa x annetaan, on aina jokin y joka on identtinen x:n kanssa. Luonnollisesti valitsemme x:n itsensä y:n arvoksi.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x = x)}{x = x}\ \forall\mathbf{E}}{\exists y(x = y)}\ \exists\mathbf{T}}{\forall x \exists y(x = y)}\ \forall\mathbf{T}$$

□

Tehtävä 297 *Todista* $\forall x_0(P_0(x_0) \rightarrow \forall x_1(\neg P_0(x_1) \rightarrow \neg x_0 = x_1))$ *(Kukaan joka laulaa ei ole identtinen sellaisen kanssa joka ei laula.)*

Ratkaisu: Haluamme näyttää, että aina kun meillä on laulava a ja ei laulava b niin $a \neq b$. Identiteetti säilyttää kaikki ominaisuudet, joten $a = b$ johtaa ristiriitaan. Katso Kuva 2.22.

□

Tehtävä 298 *Todista*

$$\exists x_0 \forall x_1(x_0 = x_1) \rightarrow \forall x_2 \forall x_3(x_2 = x_3)$$

(Jos on vain yksi alkio niin mitkä tahansa kaksi alkiota ovat identtisiä.)

Ratkaisu: Miettikäämme tätä: Olettakaamme, että on olemassa jokin a siten, että jokainen alkio on yhtä kuin a. Sitten otamme kaksi alkiota x_2 ja x_3. Eli tiedämme, että $a = x_2$ ja $a = x_3$. Symmetrisyyden aksiooman nojalla tiedämme, että $x_2 = a$ ja $a = x_3$.Transitiivisyys aksiooman nojalla tiedämme, että $x_2 = x_3$. Katso Kuva 2.23.

□

Tehtävä 299 *Todista kaava* $x < y \rightarrow \neg y < x$ *käyttäen järjestyksen aksioomia.*

Ratkaisu: Olettakaamme, että $x < y$. Miksei ole totta, että $y < x$? Koska jos $y < x$, transitiivisyyden nojalla $x < x$, mutta antirefleksiivisyyden nojalla $x < x$ ei ole totta. Siis $y < x$ johtaa ristiriitaan ja voimme päätellä, että $y < x$ ei ole totta. Katso Kuva 2.23.

□

2.15.7 Tehtävät

Tehtävä 300 *Todista seuraava lause:*

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(x = y \wedge P(y))).$$

(Kaikki jotka laulavat ovat identtisiä sellaisen kanssa joka laulaa.)

T1	$<$ on järjestys	Laatat ovat tietyssä järjestyksessä
T2	$\forall x \neg (B(x) \wedge R(x))$	Mikään laatta ei ole punainen ja sininen
T3	$\forall x \neg (B(x) \wedge Y(x))$	Mikään laatta ei ole sininen ja keltainen
T4	$\forall x \neg (R(x) \wedge Y(x))$	Mikään laatta ei ole punainen ja keltainen
T5	$\forall x (R(x) \vee B(x) \vee Y(x))$	Jokainen laatta on punainen, sininen, tai keltainen

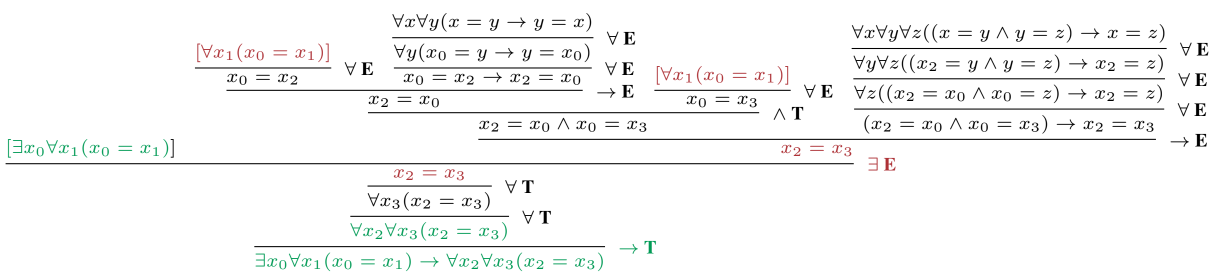
Kuva 2.20: Laattamallien aksioomat.

G1	$\forall x \neg x E x$	antirefleksiivisyys
G2	$\forall x \forall y (x E y \rightarrow y E x)$	symmetrisyys

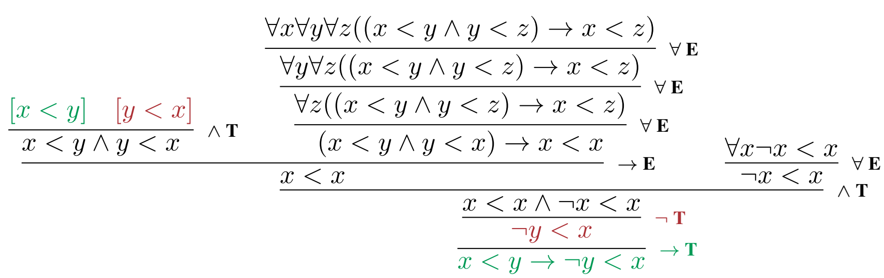
Kuva 2.21: Verkkoteorian aksioomat.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg P_0(x_1)] \qquad \dfrac{\dfrac{[x_0 = x_1] \quad [P_0(x_0)]}{x_0 = x_1 \wedge P_0(x_0)} \wedge \mathbf{T} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \forall y ((x_0 = y \wedge P_0(x_0)) \rightarrow P_0(y))}{\forall y ((x_0 = y \wedge P_0(x_0)) \rightarrow P_0(y))} \forall \mathbf{E}}{(x_0 = x_1 \wedge P_0(x_0)) \rightarrow P_0(x_1)} \forall \mathbf{E}}{P_0(x_1)} \rightarrow \mathbf{E}}{P_0(x_1) \wedge \neg P_0(x_1)} \wedge \mathbf{T}}{\neg x_0 = x_1} \neg \mathbf{T}}{\neg P_0(x_1) \rightarrow \neg x_0 = x_1} \rightarrow \mathbf{T}}{\forall x_1 (\neg P_0(x_1) \rightarrow \neg x_0 = x_1)} \forall \mathbf{T}}{P_0(x_0) \rightarrow \forall x_1 (\neg P_0(x_1) \rightarrow \neg x_0 = x_1)} \rightarrow \mathbf{T}}{\forall x_0 (P_0(x_0) \rightarrow \forall x_1 (\neg P_0(x_1) \rightarrow \neg x_0 = x_1))} \forall \mathbf{T}
$$

Kuva 2.22: Kukaan joka laulaa ei ole identtinen sellaisen kanssa joka ei laula.



Kuva 2.23: Jos on vain yksi alkio, niin mitkä tahansa kaksi alkiota ovat identtiset.



Kuva 2.24: Pienempi kuin ei ole suurempi kuin.

Tehtävä 301 *Todista seuraava lause:*

$$\forall x(\exists z R(x,z) \to \forall y(x = y \to \exists z R(y,z))).$$

Tehtävä 302 *Todista seuraava lause:*

$$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge A) \to A(y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n),$$

kun y_i is on vapaa muuttujalle x_i kun $i = 1, \ldots, n$. (Identtisiä alkioita voidaan vaihtaa keskenään)

Tehtävä 303 *Todista seuraava lause:*

$$\exists x \exists y \forall z(z = x \vee z = y) \to \forall x \forall y \forall z(x = y \vee y = z \vee x = z)$$

(Jos on vain kaksi alkiota, niin kolmesta alkiosta, kaksi ovat aina identtisiä)

Tehtävä 304 *Todista, että seuraava lause on tosi mallissa jos ja vain jos mallissa on enintään n alkiota.*

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)$$

Tehtävä 305 *Todista, että lauseesta*

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)$$

voidaan johtaa seuraava lause:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{n+1}(x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee \ldots \vee x_n = x_{n+1}).$$

Intuitiivinen syy: jos on enintään n alkiota, niin $n+1$ alkiossa on pakko olla toistoa.

Tehtävä 306 *Näytä, että seuraavat mallit toteuttavat järjestyksen aksioomat:*

- *Luonnolliset luvut* $(\mathbb{N}, <)$
- *Reaaliluvut* $(\mathbb{R}, <)$
- *Rationaaliluvut* $(\mathbb{Q}, <)$
- $(\{0, 1, \ldots, n\}, <)$

Tehtävä 307 *Todista järjestyksen aksioomista seuraava lause:*

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \to (z < y \vee x < z))$$

Tehtävä 308 *Todista järjestyksen aksioomista seuraava lause:*

$$\begin{aligned} &\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n) \\ &\to \exists x \forall y(x < y \vee x = y). \end{aligned}$$

(Jos järjestys on äärellinen, siinä on pienin alkio)

Tehtävä 309 *Todista järjestyksen aksioomista seuraava lause:*

$$\begin{aligned} &\forall x \forall x'((\forall y(y < x \vee y = x) \\ &\wedge \forall y(y < x' \vee y = x')) \to x = x') \end{aligned}$$

(Suurin alkio on yksikäsitteinen jos se on olemassa)

Tehtävä 310 *Todista laattaaksioomista seuraava lause:*

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge S(y)) \to (x < y \vee y < x))$$

(Jos x on punainen ja y on sininen, niin toinen on toisen vasemmalla puolella.)

Tehtävä 311 *Todista laattaaksioomista seuraava lause:*

$$\forall x(\forall y(P(y) \to y < x) \to (S(x) \vee K(x)))$$

(Jos jokainen punainen laatta on x:n vasemmalla puolella niin silloin x on sininen tai keltainen)

Tehtävä 312 *Todista laattaaksioomista seuraava lause:*

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y((P(x) \wedge S(y)) \to x < y) \to \\ &\forall x \forall y((S(x) \wedge P(y)) \to y < x) \end{aligned}$$

(Jos jokainen punainen laatta on jokaisen sinisen laatan vasemmalla puolella, niin silloin jokainen sininen laatta on jokaisen punaisen laatan oikealla puolella.)

Tehtävä 313 *Todista verkkoaksioomista seuraava lause:*

$$\exists x \forall y(\neg y = x \to yEx) \leftrightarrow \exists x \forall y(\neg x = y \to xEy)$$

(Ekvivalenssi sanoo "Jokin solmu on jokaisen toisen solmun naapuri" kahdella eri tavalla.)

Tehtävä 314 *Todista verkkoaksioomista seuraava lause:*

$$\forall x \forall y(\neg y = x \to yEx) \leftrightarrow \forall x \forall y(\neg x = y \to xEy)$$

(Ekvivalenssi sanoo "Mitkä tahansa kaksi erillistä solmua ovat naapureita" kahdella eri tavalla.)

Tehtävä 315 *Todista verkkoaksioomista seuraava lause:*

$$\forall x \forall y(xEy \to \neg x = y)$$

(Tämä on antirefleksiivisyyden aksiooma, mutta vain eri muodossa)

2.16 Semanttiset puut

Kuten propositiologiikassa, predikaattilogiikassakin semanttiset puut ovat tehokas vaihtoehtoinen todistus menetelmä – vaihtoehto luonnolliselle päättelylle. Semanttiset todistukset ovat hyvin helppoja myös predikaattilogiikassa. Tavallaan, semanttinen todistus todistaa lauseen kuvailemalla tilanteen missä lause ei olisi totta ja näyttämällä, että se ei ole mahdollista. Esimerkiksi, propositiologiikassa todistimme A:n olevan tosi näyttämällä semanttisen puun avulla, että $\neg A$ oli mahdottomuus, joten A:n on pakko olla totta.

Perusidea semanttisen puun laatimisessa on seuraava: Puun huipulle kirjoitetaan kaava, ja kuvittelemme, että meillä on malli ja tulkintafunktio jotka toteuttavat kaavan. Sitten, riippuen kaavan loogisesta rakenteesta–onko se konjunktio, disjunktio, yms.–kirjoitamme muita kaavoja sen alle seuraten perusideaa, että kirjoitamme vain tosia kaavoja, tosi tarkoittaen siis kaavoja jotka meidän kuvittelemamme malli ja tulkintafunktio toteuttavat. Kun käytämme tätä ideaa kvanttoreden kanssa, saatamme joutua muuttamaan tulkintafunktiota. Todellisuudessa ei ole mitään mallia eikä mitään tulkintafunktiota, ne ovat vain suuntaa-antavia työkaluja. Mutta, jos käy ilmi, että jokin kaava ja sen negaatio ovat molemmat tosia kuvitteellisessa mallissa, niin tiedämme, että kuvittelemamme malli on mahdoton ja puun huipulla olevan kaavan negaation toteuttaa välttämättä minkä tahansa mallin ja minkä tahansa tulkintafunktion. Tämä on menetelmän sielu.

Kerrataan semanttisen puun säännöt:

- Disjunktio:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \lor B} \\ A & B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \lor B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- Konjunktio:

$$\begin{array}{c} A \land B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \land B)} \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

- Negaatio:

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

- Implikaatio:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \to B} \\ \neg A & B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- Ekvivalenssi:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ \neg A & A \\ | & | \\ \neg B & B \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ \neg A & A \\ | & | \\ B & \neg B \end{array}$$

2.16.1 Predikaattilogiikan semanttiset puut

Semanttisessa puussa voi olla kaavoja ja lauseita. Kertausta: jos A on kaava, niin silloin $A(t/x)$ on kaava joka on saatu A:sta vaihtamalla x aina, kun se ilmenee vapaana, t:n kanssa. Oletamme että t on vapaa muuttujalle x kaavassa A. Tässä joitain esimerkkejä:

A	$A(t/x)$
xEy	tEy
$x = y \to \exists x(xEy)$	$t = y \to \exists x(xEy)$
$\forall y(x = y \to \exists x(xEy))$	$\forall y(t = y \to \exists x(xEy))$

2.16.2 Kvanttoreiden säännöt

Universaalikvanttorin säännöt ovat seuraavat:

- Universaali:

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(d/x) \end{array}$$

Tässä tapauksessa t on termi millä tahansa oksalla joka johtaa kohtaan missä sääntöä käytetään, mutta t:n täytyy olla vapaa muuttujalle x kaavassa A. Tätä ensimmäistä sääntöä voi käyttää useamman kerran (katso Kohta 2.16.3). Toisessa tapauksessa d on uusi vakio.

- Existentiaali:

$$\begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(d/x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

Ensimmäisessä tapauksessa d on uusi vakio. Toisessa tapauksessa t on mikä tahansa termi oksalla joka johtaa kohtaan missä sääntöä käytetään, mutta t:n pitää olla vapaa muuttujalle x kaavassa A. Tätä toista sääntöä voidaan käyttää useamman kerran (katso Kohta 2.16.3).

2.16.3 Kvanttorisääntöjen erityisominaisuus

Sääntöä

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array}$$

voidaan käyttää aina kun uusia termejä ilmenee oksalle. Sama koskee sääntöä

$$\begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

Jos oksalla ei ole yhtään termiä niin termiä x voidaan käyttää tai voidaan käyttää vakiosymbolia c_0.

2.16.4 Suljettu oksa

Semanttisen puun oksa on suljettu jos siinä on sekä B että $\neg B$ jollekin B:lle.

A:n semanttinen todistus on äärellinen semanttinen puu $\neg A$:lle missä kaikki oksat ovat suljettuja.

Esimerkiksi, katsokaamme seuraavan lauseen semanttista todistusta

$$\exists x(A \wedge B) \to (\exists x A \wedge \exists x B)$$

$$\begin{array}{c} \neg(\exists x(A \wedge B) \to (\exists x A \wedge \exists x B)) \\ | \\ \exists x(A \wedge B) \\ | \\ \neg(\exists x A \wedge \exists x B) \\ | \\ A(c/x) \wedge B(c/x) \\ | \\ A(c/x) \\ | \\ B(c/x) \\ \begin{array}{cc} \neg\exists x A & \neg\exists x B \\ | & | \\ \neg A(c/x) & \neg B(c/x) \end{array} \end{array}$$

Joskus semanttisen puun kaikki oksat eivät sulkeudu: Rakentakaamme semanttinen puu seuraavaa lauselle:

$$\forall x \exists y R(x, y).$$

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y R(x, y) \\ | \\ \exists y R(c_0, y) \\ | \\ R(c_0, c_1) \\ | \\ \exists y R(c_1, y) \\ | \\ R(c_1, c_2) \\ | \\ \vdots \end{array}$$

Semanttisen todistuksen laatiminen saattaa epäonnistua. Tämä johtuu siitä, että kaikilla lauseilla ei ole semanttista todistusta, koska kaikki lauseet eivät ole valideja. Lause on validi jos ja vain jos sillä on semanttinen todistus, eli tämä metodi on täydellinen (todistus sivuutetaan.)

2.16.5 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 316 *Rakenna seuraavalle kaavalle semanttinen puu.*

$$\forall x(P_0(x) \vee P_1(x)) \wedge \neg\exists y P_0(y) \wedge \forall x \neg P_1(x)$$

Ratkaisu: Meidät on pyydetty rakentamaan semanttinen puu tälle lauseelle, ei semanttinen todistus. Joten aloitamme kyseisellä kaavalla ja seuraamme sääntöjä:

$$\begin{array}{c} \forall x(P_0(x) \vee P_1(x)) \wedge \neg\exists y P_0(y) \wedge \forall x \neg P_1(x) \\ | \\ \forall x(P_0(x) \vee P_1(x)) \\ | \\ \neg\exists y P_0(y) \\ | \\ \forall x \neg P_1(x) \\ | \\ P_0(c_0) \vee P_1(c_0) \\ | \\ \neg P_0(c_0) \\ | \\ \neg P_1(c_0) \\ \begin{array}{cc} P_0(c_0) & P_1(c_0) \end{array} \end{array}$$

Huomaamme, että molemmat puun oksat ovat suljettuja. Tämä on tärkeä havainto kuten tulemme huomaamaan myöhemmin. Tätä tietoa voidaan käyttää todetaksemme, että mikään tulkintafunktio missään mallissa ei voi toteuttaa tätä kaavaa. □

Tehtävä 317 *Rakenna seuraavalle kaavalle semanttinen puu.*

$$\forall x A \wedge \forall x B \wedge \neg \forall x (A \wedge B)$$

Ratkaisu:

$$\begin{array}{c}
\forall x A \wedge \forall x B \wedge \neg \forall x (A \wedge B) \\
| \\
\forall x A \\
| \\
\forall x B \\
| \\
\neg \forall x (A \wedge B) \\
| \\
\neg (A(c_0/x) \wedge B(c_0/x)) \\
\begin{array}{cc}
\neg A(c_0/x) & \neg B(c_0/x) \\
| & | \\
A(c_0/x) & B(c_0/x)
\end{array}
\end{array}$$

□

2.16.6 Tehtävät

Tehtävä 318 *Laadi semanttinen todistus seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$$

Tehtävä 319 *Laadi semanttinen puu seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x (P_0(x) \wedge P_1(x)) \wedge \neg \exists y P_0(y) \wedge \neg \exists x P_1(x)$$

Tehtävä 320 *Laadi semanttinen puu seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x (A \wedge \neg B) \wedge \forall x (A \rightarrow B)$$

2.17 Lisää semanttisista puista

2.17.1 Semanttisten puiden eheys

Tulemme osoittamaan, että aina kun A:lla on semanttinen todistus, niin A on validi. Jos A:lla on semanttinen todistus niin silloin $\neg A$:lla on semanttinen puu P jossa kaikki oksat sulkeutuvat. Jotta voimme todistaa että A on validi, oletamme, että tulkintafunktio s mallissa $\mathcal{M}$ toteuttaa $\neg A$:n ja johdamme tästä ristiriidan. Tulkintafunktio s ja malli $\mathcal{M}$ auttavat meitä rakentamaan semanttiseen puuhun P, oksan joka ei ole suljettu. Tämä on ristiriitaa.

Lause 2.21 *Jos A:lla on semanttinen todistus, niin A on validi.*

Olettakaamme että P on $\neg A_0$:n semanttinen puu, mutta A_0 ei ole validi. Antakaamme $\mathcal{M}$:n olla jokin malli jossa tulkintafunktio s ei toteuta lausetta A_0. Tällöin tulkintafunktio s mallissa $\mathcal{M}$ toteuttaa $\neg A_0$:n. Nyt rakennamme semanttisen puun oksan siten, että oksan jokainen kaava toteutuu tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$. Oksa rakennetaan induktiivisesti askel kerrallaan, ja induktio-oletuksen nojalla oletamme, että s toteuttaa kaikki kaavat ennen tätä askelta. Alussa tämä toimii koska tulkintafunktio s mallissa $\mathcal{M}$ toteuttaa $\neg A_0$:n.

Disjunktio:

$$\begin{array}{c}
A \vee B \\
\begin{array}{cc} A & B \end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg (A \vee B) \\
| \\
\neg A \\
| \\
\neg B
\end{array}$$

Olettakaamme, että olemme päässeet puun solmuun K. Tässä solmussa on kaava $A \vee B$, ja täten oksa haarautuu A:han ja B:hen disjunktio säännön takia. Induktio-oletuksen nojalla tulkintafunktio s mallissa $\mathcal{M}$ toteuttaa kaavan $A \vee B$. Tällöin tulkintafunktio s mallissa $\mathcal{M}$ toteuttaa joko A:n tai B:n. Jos s toteuttaa A:n, seuraamme oksaa vasemmalle, ja jos s taas toteuttaa B:n niin seuraamme oksaa oikealle. Kummassakin tapauksessa säilyy totuus mallissa $\mathcal{M}$.

Olettakaamme että, olemme päässeet puun solmuun K. Tässä solmussa on kaava $\neg(A \vee B)$ ja puu jatkuu kaavoilla $\neg A$ ja $\neg B$ negaatiodisjunktio säännön takia. Induktio-oletuksen nojalla tulkintafunktio s mallissa $\mathcal{M}$ toteuttaa kaavan $\neg(A \vee B)$. Tämä tarkoittaa, että sekä $\neg A$ että $\neg B$

toteutuvat tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$. Siis jos seuraamme oksaa eteenpäin, säilyy totuus mallissa $\mathcal{M}$.

Konjunktio:

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \wedge B) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad \neg B \end{array}$$

Olettakaamme, että olemme päässeet kaavaan $\neg(A \wedge B)$ asti ja tulkintafunktio s toteutettaa tämän mallissa $\mathcal{M}$. Jos s toteuttaa $\neg A$:n niin seuraamme oksaa vasemmalle, jos s toteuttaa $\neg B$:n niin seuraamme oksaa oikealle. Molemmissa tapauksissa mallissa $\mathcal{M}$ säilyy totuus.

Olettakaamme, että olemme päässeet kaavaan $A \wedge B$ asti ja tulkintafunktio s toteutettaa tämän mallissa $\mathcal{M}$. Silloin sekä A että B ovat toteutettavissa tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$. Joten jos seuraamme ainoata oksaa eteenpäin, säilytämme totuuden mallissa $\mathcal{M}$.

Negaatio:

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

Olettakaamme, että olemme päässeet kaavaan $\neg\neg A$ ja tämä on myös toteutettavissa tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$. Sitten myös A on toteutettavissa tulkintafunktiolla s. Joten jos seuraamme oksaa totuus mallissa $\mathcal{M}$ säilyy.

Implikaatio:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Ekvivalenssi:

$$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad A \\ | \qquad\quad | \\ \neg B \qquad B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \leftrightarrow B) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad A \\ | \qquad\quad | \\ B \qquad \neg B \end{array}$$

Universaali:

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(d/x) \end{array}$$

Ensimmäisessä tapauksessa t on mikä tahansa termi oksassa joka johtaa kohti lausetta $\forall x A$, mikä on vapaana muuttujalle x lauseessa A. Toisessa tapauksessa d on uusi vakio.

Olettakaamme, että olemme päässeet kaavaan $\forall x A$ ja tulkintafunktio toteuttaa tämän mallissa $\mathcal{M}$. Tällöin s toteuttaa lauseen $A(t/x)$, oli termi t mikä tahansa, mallissa $\mathcal{M}$. Jos t:tä ei ole vielä määritelty, joko mallissa $\mathcal{M}$ tai tulkintafunktiossa s, niin voimme olettaa että se on mielivaltainen ja silti väittää että $A(t/x)$ on totta mallissa $\mathcal{M}$. Siis totuus mallissa $\mathcal{M}$ säilyy.

Olettakaamme, että olemme päässeet kaavaan $\neg\forall x A$ ja tulkintafunktio toteuttaa tämän mallissa $\mathcal{M}$. On myös alkio a mallissa M siten, että tulkintafunktio $s(a/x)$ toteuttaa $\neg A$. Antakaamme d:n olla uusi vakio. Tulkitkaamme d mallissa $\mathcal{M}$ siten, että $d^{\mathcal{M}} = a$. Nyt tällä uudella mallilla, eli mallilla $\mathcal{M}$ jossa on uusi vakio, ylläpidämme $\neg A(d/x)$:n toteutuksen mallissa $\mathcal{M}$ tulkintafunktiolla s.

Eksistenssi:

$$\begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(d/x) \end{array}$$

(Harjoitustehtävä)

Todistuksen loppu: Yllä näytetyt askeleet joko päättyvät atomilauseeseen tai oksa jatkuu loputtomasti, eli on ääretön. Kummassakin tapauksessa on mahdotonta, että tulkintafunktio s toteuttaa jokin lauseen ja sen negaation mallissa $\mathcal{M}$, eli oksa ei voi sulkeutua.

Jos rakennamme semanttisen puun $\neg A$:lle, ja olemme kokeilleet kaikki mahdolliset säännöt, mutta silti puussa on oksa joka ei ole sulkeutunut vielä, niin voimme rakentaa mallin $\mathcal{M}$ ja tulkintafunktion s siten että $\neg A$ on toteutuu mallissa $\mathcal{M}$ tulkintafunktiolla s. Tätä kutsutaan semanttisen todistuksen Täydellisyyslauseeksi. (Todistus sivuutetaan).

2.17.2 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 321 *Käytä semanttisia puita luodaksesi malli seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x \exists y R_0(x, y) \wedge \neg\forall x R_0(x, x).$$

Ratkaisu: Huomaa, että on muitakin tapoja luoda malleja annetuille lauseille, kuten ad hoc metodi missä kokeillaan tuttuja malleja ja toivotaan parasta. Me kuitenkin käytämme semanttisia puita luodaksemme mallin:

$$\begin{array}{c}
\exists x \exists y R_0(x,y) \wedge \neg \forall x R_0(x,x) \\
| \\
\exists x \exists y R_0(x,y) \\
| \\
\neg \forall x R_0(x,x) \\
| \\
\neg R_0(c_0,c_0) \\
| \\
\exists y R_0(c_1,y) \\
| \\
R_0(c_1,c_2)
\end{array}$$

Semanttinen puu viittaa malliin $\mathcal{M}$ siten, että universumi on $\{0,1,2\}$, $R_0^{\mathcal{M}} = \{(1,2)\}$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0, c_1^{\mathcal{M}} = 1, c_2^{\mathcal{M}} = 2$. On helppoa todistaa, että $\mathcal{M}$ tosiaan on kyseisen lauseen malli. □

Tehtävä 322 *Käytä semanttisia puita luodaksesi malli seuraavalle lauseelle:*

$$\forall x \exists y R_0(x,y) \wedge \neg \forall x R_0(x,x).$$

Ratkaisu: Huomaa, että on muitakin tapoja luoda malleja annetuille lauseille, kuten ad hoc metodi missä kokeillaan tuttuja malleja ja toivotaan parasta. Me kuitenkin käytämme semanttisia puita luodaksemme mallin:

$$\begin{array}{c}
\forall x \exists y R_0(x,y) \wedge \neg \forall x R_0(x,x) \\
| \\
\forall x \exists y R_0(x,y) \\
| \\
\neg \forall x R_0(x,x) \\
| \\
\neg R_0(c_0,c_0) \\
| \\
\exists y R_0(c_0,y) \\
| \\
R_0(c_0,c_1) \\
| \\
\exists y R_0(c_1,y) \\
| \\
R_0(c_1,c_2) \\
| \\
\exists y R_0(c_2,y) \\
| \\
R_0(c_2,c_3) \\
| \\
\text{etc.}
\end{array}$$

Semanttinenpuu viittaa malliin $\mathcal{M}$ siten, että universumi on is $\{0,1,2,\ldots\}$, $R_0^{\mathcal{M}} = \{(n,n+1) : n = 0,1,2,\ldots\}$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0, c_1^{\mathcal{M}} = 1, c_2^{\mathcal{M}} = 2, \ldots$. On helppoa todistaa, että $\mathcal{M}$ tosiaan on kyseisen lauseen lauseen malli. □

2.17.3 Tehtävät

Tehtävä 323 *Luo semanttinen puu seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x(P_0(x) \wedge P_1(x)) \wedge \forall y(P_0(y) \to \neg P_1(y))$$

Tehtävä 324 *Luo semanttinen puu seuraavalle lauseelle:*

$$\forall x(A \vee B) \wedge \exists x(\neg A \wedge \neg B)$$

Tehtävä 325 *Luo semanttinen puu seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x(P_0(x) \wedge \neg P_1(x)) \wedge \forall y(P_0(y) \to P_1(y))$$

Tehtävä 326 *Luo semanttinen todistus seuraavalle lauseelle:*

$$\exists x \forall y \neg R(x,y) \to \exists x \neg \exists y R(x,y)$$

Tehtävä 327 *Käytä semanttisia puita luodaksesi malli seuraavalle lauseelle:*

$$\forall x \exists y R_0(x,y) \wedge \neg \forall x \exists y R_0(y,x).$$

Huomaa, että on muitakin tapoja luoda malleja annetuille lauseille, kuten ad hoc metodi missä kokeillaan tuttuja malleja ja toivotaan parasta.

Tehtävä 328 *Käytä semanttisia puita luodaksesi malli seuraavalle lauseelle:*

$$\forall x \exists y \forall z(R_0(x,y) \wedge R_0(y,z) \wedge \neg \forall x \forall y R_0(x,y)).$$

2.18 Validisuus uudelleen

Arkikielessä henkilö sanoo validiteetin jos hän sanoo jotain mikä on totta, mutta vain ilmaisumuotonsa takia, esimerkiksi "jokainen päivä on sateinen tai jotkut päivät eivät ole sateisia".

Predikaattilogiikan kaava on validi, tai validiteetti, jos jokainen tulkintafunktio toteuttaa sen jokaisessa mallissa.

Tässä on joitain esimerkkejä:

- $\exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A$
- $\forall x A \leftrightarrow \neg\exists x \neg A$
- $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x A \vee \exists x B)$
- $\forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x A \wedge \forall x B)$
- $\forall x\, x = x$ (identiteettiaksioomilla on erikoinen rooli koska ne ovat aina oletettuja kun "=" on osa kaavaa.)

2.18.1 Toteutuva

Kaava on toteutuva jos se on toteutuva jossain mallissa jollakin tulkintafunktiolla. Arkikielessä väitettä pidetään toteutuvana –"mahdollisena"– jos asiat *voisivat* olla niin kuin väite sanoo, ja ehkä jopa ovat. Jos sanon "Galaksisamme on olemassa älykästä elämää maan ulkopuolella", niin tämä laskettaisiin mahdolliseksi, ehkäpä jopa todeksi, vaikka emme oikeastaan tiedä ja saatan olla väärässäkin. Tätä tarkoittaa toteutuva lause. Mutta nyt puhumme predikaattilogiikasta ja sanalla "toteutuva" on tekninen merkitys, nimittäin se, että lause on mahdollista jossain mallissa ja jollain tulkintafunktiolla.

Tässä joitakin esimerkkejä

- $\forall x\exists y R_0(x, y) \wedge \neg\exists y\forall x R_0(x, y)$
- $\forall x(P_0(x) \vee P_1(x)) \wedge (\neg\forall x P_0(x) \vee \neg\forall x P_1(x))$
- $\neg(\exists x P_0(x) \to \forall x P_0(x))$

2.18.2 Kumoutuva

Kaava on kumoutuva, jos on olemassa malli $\mathcal{M}$ ja tulkintafunktio s, jotka kumoavat sen, toisin sanoen tulkintafunktio s ei toteuta kaavaa mallissa $\mathcal{M}$. Se on hieman kuin joku sanoisi "Jokainen elokuun päivä on sateinen" ja sinä kumoaisit tämän väitteen osoittamalla että vuonna 1996 oli yksi päivä elokuussa jolloin ei satanut.

Tässä on joitain esimerkkejä predikaattilogiikasta:

- $\exists x P_0(x) \to \forall x P_0(x)$
- $\forall x\exists y R_0(x, y) \to \exists y\forall x R_0(x, y)$
- $x = y$

2.18.3 Kontingentti

Kaava on kontingentti jos se on toteutuva ja kumoutuva. Arkikielessä kontingentteja lauseita ovat "Sataa", "Joku imuroi yläkerrassa" tai "Bach oli kaikkien aikojen paras säveltäjä". Eli kontingenssit ovat toteutetuvia, mutta ei päinvastoin, koska validiteetit ovat toteutuvia, mutta eivät kumoutuvia.

Tässä joitain esimerkkejä predikaattilogiikasta.

- $\forall x P_0(x)$
- $\exists x\forall y R_0(x, y)$
- $\exists x(R_0(x, y) \wedge P_0(x))$
- $x = y$ (riippuen tulkintafunktiosta tämä voi olla totta tai tarua)

2.18.4 Ristiriita

Arkikielessä ihminen lausuu ristiriidan jos hän sanoo jotain mikä on väärin vain ilmaisumuotonsa takia, kuten "Olen kasvissyöjä ja en ole kasvissyöjä". Jos sanoo ristiriidan sosiaalisessa kontekstissa niin usein joutuu selventämään mitä tarkoittaa. Jos ilmaisee vain validiteetteja keskustelussa, niin keskustelu ei juuri etene. Sama asia ristiriitojen kanssa. Tämän takia ihmiset yleensä keskustellessaan ilmaisevat kontingenssejä, väitteitä jotka voisivat olla tosia tai epätosia. Arkikielessä, kuten myös tieteessä, kontingenssit arvostellaan empiirisen datan valossa. Jos väitän, että "Eilen satoi New Yorkissa", niin voisin olla oikeassa tai väärässä, eli lause on kontingenssi, mutta voimme tietenkin katsoa meterologista dataa ja tarkistaa onko minun väitteeni oikeassa vai ei.

Predikaattilogiikan lause on ristiriitainen jos mikään tulkintafunktio tai malli ei toteuta sitä.

Tässä on joitain predikaattilogiikan esimerkkejä:

- $\forall x A \wedge \exists x \neg A$
- $\exists x A \wedge \forall x \neg A$
- $\forall x(A \to B) \wedge \exists x(A \wedge \neg B)$
- $x = y \wedge x = z \wedge \neg y = z$

2.18.5 Predikaattilauseiden kategoriat

Jokainen predikaattilogiikan lause on joko validiteetti, ristiriita tai kontingenssi.

Jokainen toteutuva lause on joko validiteetti tai kontingenssi.

Jokainen kumoutuva lause on joko ristiriita tai kontingenssi.

Predikaattilogiikan lauseen kategorian tunnistaminen on loogikolle kaiken A ja O, mutta tämä voi olla erittäin vaikea tehtävä.

2.18.6 Vaikea kysymys

Jos meille annetaan kaava, voimmeko päätellä mekaanisesti onko se validiteetti, ristiriita vai kontingentti?

On todistettu, että tämä on mahdotonta jos tulkitsemme sanan "mekaanisesti" kuten nykyään yleisesti tehdään. Yleinen määritelmä mekaanisesta päättelystä, kiitos Englantilaisen matematiikon Alan Turingin (1912—1954), on suunnilleen sama kuin laskenta äärellisessä aikamäärässä tietokoneella jolla on potenttiaalisesti ääretön määrä muistia ja aikaa.

2.18.7 Päättelymenetelmä

Jos on annettu ehdokas päättelylle niin ei ole kovin vaikeaa tarkastaa onko päättely oikein tehty vai ei.

Tämä voidaan tehdä mekaanisesti. Tällaisia tietokoneohjelmia kutsutaan nimeltä proof checkers (katso esim. http://coq.inria.fr/). Voidaan tehdä lista kaikista mahdollisista päättelyistä ja tarkistaa ne yksi kerrallaan. Vaikein tilanne on, kun päättelyä annetulle lauseelle ei ole olemassakaan koska silloin kestää äärrettömän kauan varmistua tästä.

2.18.8 Kaavojen ekvivalenssi

Kaksi predikaattilogiikan kaavaa A ja B ovat (loogisesti) ekvivalentteja jos $A \leftrightarrow B$ on validiteetti. Ekvivalentteja kaavoja käytetään arkikielessä ja tieteessä usein ilman, että siihen kiinnitetään juurikaan huomiota.

2.18.9 Predikaattilogiikan ekvivalentit kaavat

Tässä on joitain tärkeitä predikaattilogiikan ekvivalensseja:

Kaava	Ekvivalentti kaava	Ehto
$\forall x A$	$\neg\exists x \neg A$	
$\exists x A$	$\neg\forall x \neg A$	
$\forall x(A \wedge B)$	$\forall x A \wedge \forall x B$	
$\exists x(A \vee B)$	$\exists x A \vee \exists x B$	
$\exists x \exists y A$	$\exists y \exists x A$	
$\forall x \forall y A$	$\forall y \forall x A$	
$\forall x(A \to B)$	$\exists x A \to B$	x ei vapaa B:ssä
$\forall x(A \to B)$	$A \to \forall x B$	x ei vapaa A:ssa
$\exists x(A \wedge B)$	$\exists x A \wedge B$	x ei vapaa B:ssä

2.18.10 Menetelmä

Oletetaan, että meidän pitää päättää onko A toteutetuva vai ristiriitainen. Rakennamme A:n semanttisen puun.

Jos kaikki oksat sulkeutuvat, niin meillä on $\neg A$:n semanttinen todistus ja tiedämme että A on ristiriitainen (koska $\neg A$ on validi!).

Toisaalta, jos käytämme kaikkia sääntöjä mahdollisimman yleisesti ja meillä on silti oksa joka ei ole suljettu, niin voimme käyttää tätä oksaa rakentaaksemme mallin A:lle. Silloin A on toteutettava. Huomaa että oksa saattaa olla ääretön.

2.18.11 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 329 *Todista seuraava looginen ekvivalenssi käyttäen luonnollista päättelyä:* $\forall x(A \to B) \leftrightarrow (\exists x A \to B)$*, olettaen, että* x *ei ole vapaa* B*:ssä.*

Ratkaisu:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x A \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(A \to B)}{A \to B}\,\forall\mathbf{E} \qquad [A]}{B}\,\to\mathbf{E}}{B}\,\exists\mathbf{E}^{1)}}{\exists x A \to B}\,\to\mathbf{T}$$

1) x ei ole vapaa B:ssä.
Voisimme tehdä saman semanttisella puulla:

$$\neg(\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to B))$$
$$\forall x(A \to B)$$
$$\neg(\exists xA \to B)$$
$$\exists xA$$
$$\neg B$$
$$A(c_0/x)$$
$$(A \to B)(c_0/x)$$
$$A(c_0/x) \to B$$
$$\begin{array}{cc} \neg A(c_0/x) & B \end{array}$$

Molemmat oksat sulkeutuvat joten tämä semanttinenpuu on semanttinen todistus kaavalle $\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to B)$.

Nyt toiseen suuntaan:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists xA \to B \qquad \dfrac{[A]}{\exists xA}\,{\scriptstyle \exists\,\mathbf{T}}}{B}\,{\scriptstyle \to\mathbf{E}}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to\mathbf{T}}}{\forall x(A \to B)}\,{\scriptstyle \forall\,\mathbf{T}^{1)}}$$

1) x ei ole vapaa B:ssä.

Tämäkin tapaus voitaisiin tehdä semanttisella puulla. □

2.18.12 Tehtävät

Tehtävä 330 *Käytä semanttisia puita luodaksesi malli seuraavalle Kaavalle.*

$$\exists x\forall y R_0(x, y) \wedge \neg\forall x R_0(x, x).$$

Tehtävä 331 *Todista käyttäen semanttisia puita seuraava kaava.*

$$\exists x(A \wedge B) \to (A \wedge \exists xB)$$

olettaen, että x ei ole vapaa muuttuja A:ssa.

Tehtävä 332 *Tutki seuraavaa kaavaa:*

$$(R(x, y) \vee \forall x P(x)) \to \forall x(R(x, y) \vee P(x)).$$

Onko kaava validi, kontingentti vai ristiriita? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä ominaisuus käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttista puuta (Katso Osa 2.18). Jos se on kontingentti, osoita tämä ominaisuus käyttäen semanttisia puita (Katso Osa 2.17).

Tehtävä 333 *Päätä onko seuraava lause validi, kontingentti vai ristiriita.*

$$\exists x P_0(x) \to \forall x P_0(x)$$

Tehtävä 334 *Päätä onko seuraava lause validi, kontingentti vai ristiriita.*

$$\neg(\neg\forall x P_0(x) \wedge \neg\exists x\neg P_0(x))$$

Tehtävä 335 *Päätä onko seuraava lause validi, kontingentti vai ristiriita.*

$$\forall x P_0(x) \vee \exists x\neg P_0(x)$$

Tehtävä 336 *Päätä onko seuraava lause validi, kontingentti vai ristiriita.*

$$\forall x\forall y(R_0(x, y) \wedge \neg R_1(x, y)) \to \exists x\forall y\neg R_1(x, y)$$

2.19 n-paikkaiset predikaatit

Tähän asti olemme käsitelleet yksipaikkaisia ja binäärisiä relaatioita. Binääriset relaatiot ovatkin paljon yleisempiä, kuin korkeampipaikkaiset relaatiot, joihin nyt tutustumme.

2.19.1 3-paikkaiset predikaatit

3-paikkainen predikaatti sitoo kolme alkiota yhteen, aivan kuin binäärinen predikaatti sitoo kaksi alkiota. Predikaatteja kutsutaan myös relaatioiksi. Seuraava relaatio

"x, y ja z ovat samalla viivalla"

on esimerkki 3-paikkaisesta relaatiosta tasossa.

3-paikkainen relaatio, joukossa M on mikä tahansa M^3:n osajoukko, eli mikä tahansa joukko kolmikkoja (a, b, c), missä a,b ja c kuuluvat joukkoon M.

Jotta voimme käsitellä 3-paikkaisia relaatioita predikaattilogiikassa laajennamme aakkostoamme seuraavasti:

- 1-paikkaiset (unaariset) predikaattisymbolit: $P_0, P_1, \ldots$
- 2-paikkaiset (binääriset) predikaattisymbolit: $R_0, R_1, \ldots$
- 3-paikkaiset predikaattisymbolit: $R_0^3, R_1^3, \ldots$

Mallissa $\mathcal{M}$ 3-paikkainen predikaattisymboli R_n^3 tulkitaan 3-paikkaiseksi relaatioksi $(R_n^3)^{\mathcal{M}} \subseteq M^3$.

Huomaa, että aakkoston uudet symbolit tuovat uusia atomilauseita, kuten $R_n^3(x, y, z)$.

2.19.2 n-paikkaiset relaatioit

n-paikkainen relaatio (tai predikaatti) sitoo n alkiota aivan kuten 3-paikkainen relaatio sitoo 3. Esimerkiksi:

$$\text{“}x - y = z - u\text{”}$$

on 4-paikkainen relaatio.

“Oppilas x kurssilla y sai arvosanan z kokeesta u vuonna w”

on 5-paikkainen relaatio. n-paikkaiset relaatiot muistuttavat monella tavalla *tietokantoja*. Teknisesti ottaen n-paikkainen relaatio joukossa M on mikä tahansa joukko n:n alkioiden n-jonoja $(a_1, \ldots, a_n)$.

Jotta voimme käsitellä n-paikkaisia relaatioita predikaattilogiikassa lisäämme aakkostoomme seuraavat symbolit.

- 1-paikkainen predikaattisymboli $P_0, P_1, \ldots$
- 2-paikkainen predikaattisymboli $R_0, R_1, \ldots$
- n-paikkainen predikaatti symboli $R_0^n, R_1^n, \ldots$

Mallissa M tutkitaan n-paikkainen predikaattisymboli R_i^n n-paikkaiseksi relaatioksi $(R_i^n)^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

Huomaa, että uudet symbolit aakkostossa tuovat myös uusia atomikaavoja, kuten $R_i^n(y_1, \ldots, y_n)$.

2.19.3 Predikaattilogiikka n-paikkaisilla predikaattisymboleilla

Mitään muutosta ei tule luonnolliseen päättelyyn eikä semanttisiin puihin. Päättelyt tehdään samaan tapaan kuin ennenkin. $R_0^3(x, y, z)$ on kuin mikä tahansa muu kaava jossa on kolme muuttujaa, esim. yksi seuraavista:

$$xEy \wedge yEz$$

$$P_0(x) \wedge P_1(y) \wedge P_2(z)$$

$$R_0(x, y) \vee R_0(x, z) \vee R_0(y, z)$$

paitsi että se on atomikaava, eli sillä ei ole sisäistä loogista rakennetta.

Koska meillä on nyt uusia atomikaavoja meidän täytyy myös lisätä uusia identiteettiaksioomia:

I1 $\forall x x = x$

I2 $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$

I3 $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

I4 $\forall x \forall y ((x = y \wedge P_n(x)) \rightarrow P_n(y))$

I5 $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \wedge x' = y' \wedge R_n(x, x')) \rightarrow R_n(y, y'))$

I6 $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow R_i^n(y_1, \ldots, y_n))$

Uusi aksiooma I6 on vain laajennus aksioomista I4 ja I5 tilanteisiin, joissa käsitellään n-paikkaisia predikaattisymboleja.

2.19.4 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 337 *Tarkastellaan seuraavaa luonnollisten lukujen 3-paikkaista relaatiota*

“x kertaa y on yhtäkuin z”

Käyttäkäämme tätä relaatiota tulkitaksemme R_0^3 mallissa $\mathcal{N}$, jonka universumi on luonnolliset luvut, eli $(a, b, c) \in (R_0^3)^{\mathcal{N}}$ jos ja vain jos $a \cdot b = c$.

Mitkä seuraavista lauseista ovat totta mallissa $\mathcal{N}$:

1. $\forall x \forall y \exists z R_0^3(x, y, z)$

2. $\forall x \forall z \exists y R_0^3(x,y,z)$

3. $\forall x \forall y \forall z \forall u((R_0^3(x,y,z) \wedge R_0^3(x,y,u)) \to z = u)$.

Ratkaisu: Ottakaamme mielivaltainen tulkintafunktio s.

1. $\mathcal{N} \models_s \forall x \forall y \exists z R_0^3(x,y,z)$ kuten näemme: Ensin huomaamme, että $(a,b,ab) \in (R_0^3)^{\mathcal{N}}$ kaikille $a,b \in N$. Siten

$$N \models_{s(a/x,b/y,ab/z)} R_0^3(x,y,z)$$

kaikille $a,b \in N$. Siten

$$N \models_{s(a/x,b/y)} \exists z R_0^3(x,y,z)$$

kaikille $a,b \in N$. Siten

$$N \models_s \forall x \forall y \exists z R_0^3(x,y,z).$$

2. $N \not\models_s \forall x \forall z \exists y R_0^3(x,y,z)$ kuten näemme: Ensin huomaamme, että $(2,a,3) \notin (R_0^3)^{\mathcal{N}}$ kaikille $a \in N$. Siten

$$N \not\models_{s(2/x,3/z,a/Y)} R_0^3(x,y,z)$$

kaikille $a \in N$. Siten

$$N \not\models_{s(2/x,3/z)} \exists y R_0^3(x,y,z).$$

Siten

$$\not\models_s \forall x \forall y \exists z R_0^3(x,y,z).$$

3. $\mathcal{N} \models_s \forall x \forall y \forall z \forall u((R_0^3(x,y,z) \wedge R_0^3(x,y,u)) \to z = u)$ kuten näemme: Ensin huomaamme, että jos $(a,b,c) \in (R_0^3)^{\mathcal{N}}$ ja $(a,b,d) \in (R_0^3)^{\mathcal{N}}$ niin silloin $c = ab = d$ eli $c = d$. Siten

$$\mathcal{N} \models_{s(a/x,b/y,c/z,d/u)} (R_0^3(x,y,z) \wedge R_0^3(x,y,u)) \to z = u$$

kaikille $a,b,c,d \in N$. Siten

$$\mathcal{N} \models_s \forall x \forall y \forall z \forall u((R_0^3(x,y,z) \wedge R_0^3(x,y,u)) \to z = u).$$

□

2.19.5 Tehtävät

Tehtävä 338 *Käytä semanttisia puita ja etsi malli kaavalle*

$$\exists x \forall y \exists z (R(x,y,z) \wedge \neg \forall x R(x,x,x)).$$

Tehtävä 339 *Todista käyttäen semanttisia puita, että lause*

$$\forall y \forall z (\exists x (R'(y) \wedge R(x,y,z)) \to (R'(y) \wedge \exists x R(x,y,z)))$$

on validi.

Tehtävä 340 *Tutki seuraavaa lausetta*

$$\forall x (P(c,d) \to R(x,c,d)) \to (P(c,d) \to \forall x R(x,c,d)).$$

Päättele onko lause validi, kontingentti vai ristiriita. Jos lause on validi tai ristiriita, osoita tämä käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita (Katso kappale 2.18). Jos lause on kontingentti, osoita tämä käyttäen semanttisia puita (Katso kappale 2.17).

Tehtävä 341 *Tutki seuraavaa lausetta*

$$(R(c,d,e) \vee \forall x P(x)) \to \forall x (R(x,d,e) \vee P(x)).$$

Päättele onko lause validi, kontingentti vai ristiriita. Jos lause on validi tai ristiriita, osoita tämä käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita (Katso kappale 2.18). Jos lause on kontingentti, osoita tämä käyttäen semanttisia puita (Katso kappale 2.17).

Tehtävä 342 *Tutki seuraavaa lausetta*

$$\forall x (P(c,d) \wedge R(x,c,d)) \wedge \exists x (P(c,d) \to \neg R(x,c,d)).$$

Päättele onko lause validi, kontingentti vai ristiriita. Jos lause on validi tai ristiriita, osoita tämä käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita (Katso kappale 2.18). Jos lause on kontingentti, osoita tämä käyttäen semanttisia puita (Katso kappale 2.17).

Tehtävä 343 *Tutki struktuuria $\mathcal{M}$, joka muodostuu kolmesta unaarisesta predikaatista ja yhdestä 3-paikkaisesta relaatiosta R alla olevan taulukon mukaan. Mallin universumi on* {*Anna, Joonas, Minna, Tero, Harri, Logiikka, Algebra, 4,5*}.

P_0	P_1	P_2
Anna	*Logiikka*	*5*
Joonas	*Algebra*	*4*
Minna	*Algebra*	*4*
Tero	*Logiikka*	*4*
Harri	*Algebra*	*5*

Mitkä seuraavista lauseista ovat totta struktuurissa $\mathcal{M}$?

1. $\exists x \exists y((P_0(x) \wedge P_0(y) \wedge \exists z \exists u(R(x,z,u) \wedge R(y,z,u) \wedge \neg x = y))$

2. $\exists x \exists y((P_1(x) \wedge P_1(y) \wedge \exists z \exists u(R(z,x,u) \wedge R(z,y,u) \wedge \neg x = y))$

3. $\exists x \exists y((P_2(x) \wedge P_2(y) \wedge \exists z \exists u(R(u,z,x) \wedge R(u,z,y) \wedge \neg x = y))$

2.20 Funktiot

Funktio käsitteenä on tuttu monesta paikasta, esimerkiksi,

- Analyysi: x^3, $\sin(x)$, $\sqrt{1+x^2}$
- Algebra: x^3, x^{-1},
- Joukko-oppi: $\{(x,y) \in R^2 : x^3 = y\}$.

Jotta voimme käyttää logiikkaa funktioiden tutkimisessa, otamme käyttöön funktiosymbolit.

Myös usean muutujan funktiot ovat tuttuja, esimerkiksi,

- Analyysi: xy, $\sin(x+y)$, $sin(x)cos(y)$
- Algebra: $x \cdot y$, $x^{-1}y$
- Lineaarialgebra: $2x + 5y$, $10x - y + 2z$
- Joukko-oppi: $\{(x,y,z) \in R^2 : x + y = z\}$

Funktiosymbolien käyttöönotto laajentaa logiikan käyttökelpoisuutta, mutta samalla tekee logiikasta monimutkaisemman, kuten tulemme näkemään.

2.20.1 Funktiosymbolit

Jotta voimme käyttää logiikkaa funktioiden tutkimiseen, esittelemme n-paikkaiset funktiosymbolit kun $n > 0$.

Vastedes aakkostoissa saa olla myös funktiosymboleja

- $F_0^n, F_1^n, \ldots$

Tässä F_i^n on n-paikkainen funktiosymboli. Käytämme F, F', G, G' jne. lyhenteinä funktiosymboleille.

Jos aakkostossamme on funktiosymboleja, tulkitsemme nämä symbolit odotetusti funktioina määrittelyjoukossa:

Funktiosymboli F_i^n tulkitaan mallissa $\mathcal{M}$, jolla on määrittelyjoukko M, n-paikkaisena M:n funktiona, eli

$$(F_i^n)^{\mathcal{M}} : M^n \to M$$

Huomaa, että nämä funktiot ovat totaaleja, eli määritelty kaikkialla. Jos haluamme ottaa symbolin F_0^1 funktiota $1/x$ varten, reaalilukujen määrittelyjoukossa, meidän täytyy määritellä F_0^1 myös, kun $x = 0$. Voimme esimerkiksi määritellä $1/0 = 0$, mutta yleensä matematiikassa funktio $1/x$ nähdään osittaisena funktiona, toisin sanoen funktiona joka ei ole määritelty kaikkialla.

Nyt kun meillä on funktiosymboleita voimme muodostaa uusia termejä:

- $F(x), G(x,c)$
- $F(F(x)), G(F(x),c)$
- jne.

Huomaa, että sallimme sisäkkäiset funktiosymbolit, kuten:

$$G(F(x),c).$$

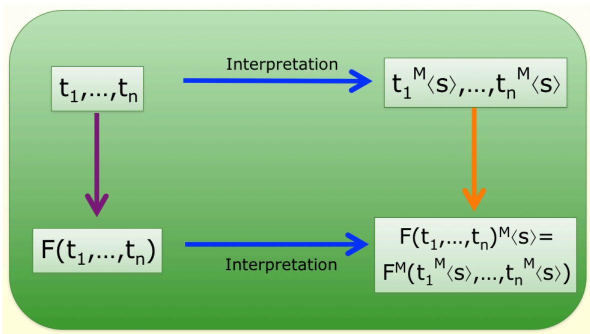
Tämä antaa uutta elämää termien maailmaan. Ei ole enää pelkkiä vakioita tai muuttujia, voi olla myös pitkiä monimutkaisia sisäkkäisiä lausekkeita, kuten polynomeissa.

Huomaa: joissain termeissä ei ole muuttujia, kuten $G(F(c),c)$. Niitä kutsutaan vakiotermeiksi.

Uusien termiemme avulla saamme uusia atomikaavoja

$$t = t'$$

Esimerkiksi:



Kuva 2.25: Termin arvo.

- $y = F(x)$.
- $F(x) = G(y, y)$.
- $G(x, y) = G(F(x), x)$.
- $F(G(x, y)) = G(F(x), F(y))$.

2.20.2 Uusien termien arvot

Kuten vanhoilla termeillä x_n ja c, uusillakin termeillä t on arvo $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ kussakin mallissa ja tulkintafunktiossa:

- $x^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x)$
- $c^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c^{\mathcal{M}}$
- $F(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$

Kolmannessa tapauksessa, kun määrittelemme $F(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$:n arvon, määrittelemme ensin argumenttien, $t_1, \ldots, t_n$, arvot, jolloin saamme $t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ ja sitten sovellamme näitä arvoja funktiotsymbolia F mallissa $\mathcal{M}$ tulkitsemaan funktioon $F^{\mathcal{M}}$ (katso Kuva 2.25).

Määritelmä 2.22 *Uusien kaavojen toteutus on määritelty seuraavasti:* $\mathcal{M} \models_s t = t' \iff t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$.

Esimerkiksi:

$$\mathcal{M} \models_s F(x) = G(F(x))$$
$$\iff F^{\mathcal{M}}(s(x)) = G^{\mathcal{M}}(F^{\mathcal{M}}(s(x))).$$

2.20.3 Kokonaislukujen rengas

Tarkastellaan mallia $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, minkä universumissa on positiiviset ja negatiiviset kokonaislukuvut ja funktioina kokonaislukujen yhteenlaskulla ja kertolaskulla. Tämä saattaa olla matematiikan tärkein malli! Sitä kutsutaan algebrassa kokonaislukujen renkaaksi. Tähän usein lisätään vakiot 0 ja 1.

Olettakaamme, että $n > 2$. Onko olemassa kokonaislukuja x , y ja z (kaikki > 0) siten, että $x^n + y^n = z^n$? Ei! (Tätä kutsutaan Fermat'n suureksi lauseeksi.)

2.20.4 Luonnolliset luvut ja seuraajafunktio

Luonnollisten lukujen struktuuri, $(\mathbb{N}, s)$, missä $S'(n) = n + 1$ on luultavasti *fundamentaalisin* struktuuri matematiikassa. Usein lisätään 0 vakiona. Seuraajafunktion tärkeitä ominaisuuksio ovat:

- $S(n) = S(m) \to n = m$.
- Jos $n > 0$, niin on m jolle $S(m) = n$.

Tämä struktuuri toteuttaa myös ns. induktioskeeman: Olettakaamme, että A on kaava jossa on vakio 0 ja seuraajafunktio $s(n) = n + 1$. Silloin

$$(A(0/x_0) \land \forall x_0(A \to A(S(x_0)/x_0))) \to \forall x_0 A$$

on induktioaksiooma. Induktioskeema on kaikkien induktioaksioomin joukko.

2.20.5 Termien vaikutus päättelyissä

Termit, joissa on funktiosymboleja, antavat uusia rajoituksia sijoituksiin ja kvanttiorisääntöihin. Uudet rajoitukset nousevat luonnostaan siitä, että jossain termissä saattaa olla monia muuttujia ja meidän pitää huomioida ne kaikki.

Termi t on vapaa muuttujalle x kaavassa A jos mikään muuttuja y joka esiintyy t:ssä ei muutu sidotuksi muuttujaksi sijoituksen jälkeen. Merkintää $A(t/x)$ käytetään vain ja ainoastaan, kun t on vapaa muuttujalle x kaavassa A.

Voimme aina muuttaa A:n loogisesti ekvivalentiksi kaavaksi A' muuttamalla sidotut muuttujat siten, että t on vapaa muuttujalle x kaavassa A.

Huomaa, että $F(x, y)$ ei ole vapaa muuttujalle x kaavassa $\forall y(R(x, y) \to P(y))$, mutta se on vapaa muuttujalle x loogisesti ekvivalentissa kaavassa $\forall z(R(x, z) \to P(z))$.

2.20.6 Kvanttorien säännöt päättelyissä ja semanttisissa puissa

Luonnollinen päättely

Kun käytetään universaalikvanttorin eliminointisääntöä tai eksistenssikvanttorin tuontisääntöä luonnollisessa päättelyssä, niin termin t joka sijoitetaan muuttujaan x täytyy olla vapaa muuttujalle x kaavassa A. Koska funktiosymbolin mukaan oton jälkeen meillä on lisää termejä, meidän täytyy olla varovaisia näiden sääntöjen kanssa.

Semanttiset puut

Kun rakennamme semanttisia puita todistaaksemme asioita predikaattilogiikassa, jossa on funktiosymboleja, niin meidän täytyy ottaa kaikki termit huomioon, myös ne termit joissa on funktiosymboleja:

- Universaali:

  $$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(d/x) \end{array}$$

  Ensimmäisessä tapauksessa t on mikä tahansa termi oksalla joka johtaa solmuun [2] $\forall x A$, mutta t:n täytyy olla vapaa muuttujalle x kaavassa A. Toisessa tapauksessa d on uusi vakio.

- Eksistentiaali:

  $$\begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(d/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

  Ensimmäisessä tapauksessa d on uusi vakio. Toisessa tapauksessa t on mikä tahansa termi oksalla joka johtaa solmuun $\forall x A$, mutta taas kerran t:n täytyy olla vapaa muuttujalle x kaavassa A.

[2] Ei ole väärin valita termi t joka *ei* esiintyy oksalla, mutta ei siitä ole mitään hyötyäkään, koska tätä sääntöä toistetaan aina kun uusi termi ilmenee.

Esimerkki

Antakaamme semanttinen todistus lauseelle $\forall x P(x) \to P(F(c))$?

$$\begin{array}{c} \neg(\forall x P(x) \to P(F(c))) \\ | \\ \forall x P(x) \\ | \\ \neg P(F(c)) \\ | \\ P(F(c)) \end{array}$$

Puun ainoa oksa sulkeutuu eli puu on semanttinen todistus kyseiselle lauseelle.

Funktiosymbolit tarvitsevat myös uusia identiteettiaksioomia. Haluamme voida sanoa, että jos meillä on kaksi funktiota ja niiden argumentit ovat identtiset, niin silloin myös niiden arvot ovat identtiset.

Uusi identiteettiaksiooma:

I7 $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots, y_n))$

2.20.7 Ratkotut tehtävät

Tehtävä 344 *Tutki luonnollisten lukujen struktuuria funktiolla $S(n) = n + 1$ ja variolla 0. Todista seuraava kaava*

$$\forall x_0(\neg x_0 = 0 \to \exists x_1(x_0 = S(x_1)))$$

käyttäen induktioskeemaa.

Ratkaisu: Antakaamme A:n olla kaava $\neg x_0 = 0 \to \exists x_1(x_0 = S(x_1))$. Todistamme ensin $A(0/x_0)$ eli $\neg 0 = 0 \to \exists x_1(0 = S(x_1))$. Tämä seuraa identiteettiaksioomasta $\forall x(x = x)$ helposti. Sitten, olettamme A ja johdamme $A(S(x_0)/x_0)$ eli $\neg S(x_0) = 0 \to \exists x_1(S(x_0) = S(x_1))$. Tämä on helppoa vaikka ei olettaisikaan A:ta. Täten olemme todistaneet $\forall x_0(\neg x_0 = 0 \to \exists x_1(x_0 = S(x_1))$. Katso kuva 2.26.
□

Tehtävä 345 *Seuraava kaava on vahvempi versio identiteettiaksioomsta I7. Todista sen validisuus.*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n)$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\forall x\; x = x}{0 = 0}\,\forall\mathbf{E} \qquad [\neg 0 = 0]}{0 = 0 \wedge \neg 0 = 0}\,\wedge\mathbf{T}
}{\neg\neg\exists x_1(0 = S(x_1))}\,\neg\mathbf{T}
}{\exists x_1(0 = S(x_1))}\,\neg\mathbf{E}
}{\neg 0 = 0 \to \exists x_1(0 = S(x_1))}\,\to\mathbf{T}
}{A(0/x_0)}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\forall x(x = x)}{S(x_0) = S(x_0)}\,\forall\mathbf{E}}{\exists x_1(S(x_0) = S(x_1))}\,\exists\mathbf{T}
}{A(S(x_0)/x_0)}
}{A \to A(S(x_0)/x_0))}\,\to\mathbf{T}
}{\forall x_0(A \to A(S(x_0)/x_0))}\,\forall\mathbf{T}
}{A(0/x_0) \wedge \forall x_0(A \to A(S(x_0)/x_0))}\,\wedge\mathbf{T}
\qquad B
}{\forall x_0(\neg x_0 = 0 \to \exists x_1(x_0 = S(x_1)))}\,\to\mathbf{E}
$$

Tässä päättelyssä B on induktioaksiooma $(A(0/x_0) \wedge \forall x_0(A \to A(S(x_0)/x_0))) \to \forall x_0 A$

Kuva 2.26: Esimerkki induktion käytöstä.

$$\to t = t'),$$

missä t' saadaan t:stä vaihtamalla x_1 ja y_1 keskenään, x_2 ja y_2 keskenään, jne.

Ratkaisu: Jos t on vakio, niin silloin t' ja t ovat identtiset ja väite on triviaali. Jos t on jokin muu muuttuja kuin $x_1, \ldots, x_n$ niin silloin t' ja t ovat taas identtiset ja väite seuraa. Jos t on muuttuja x_i, silloin t' on y_i ja väite on käytännössä mallia $x_i = y_i \to x_i = y_i$ ja siis triviaali. Meille jää seuraava tapaus: t on $F(t_1, \ldots, t_m)$.

Huomaa, että $t' = F(t'_1, \ldots, t'_m)$ missä t'_i saadaan t_i:stä vaihtamalla x_i ja y_i $(i = 1, \ldots, m)$. Meidän on oletettava induktiohypoteesina, että

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n)$$
$$\to t_i = t'_i)$$

kaikille $i = 1, \ldots, m$. Sitten todistamme seuraavan validiteetin:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n)$$
$$\to F(t_1, \ldots, t_m) = F(t'_1, \ldots, t'_m)).$$

Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja s tulkintafunktio. Olettakaamme, että $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ ovat sellaisia, että

$$\mathcal{M} \models_{s'} (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n),$$

missä[3]

$$s' = s(a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n / x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n).$$

[3] s(ab/xy) tarkoittaa s(a/x)(b/y)

Nyt $a_i = b_i$ kun $i = 1, \ldots, n$. Induktiohypoteesin nojalla $t_j^{\mathcal{M}}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}}_j\langle s'\rangle$. Siis $\mathcal{M} \models_{s'} F(t_1, \ldots, t_m) = F(t'_1, \ldots, t'_m)$.

Huomaa, että identtiaksiooman I7:n vahvemman version validiteetti voidaan myös todistaa käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita. □

2.20.8 Tehtävät

Tehtävä 346 *Käytä semanttisia puita luodaksesi seuraaavalle kaavalle malli.*

$$\forall x R(x, F(x)) \vee \neg\forall x R(x, x).$$

Tehtävä 347 *Todista, että seuraava lauseen on validi käyttäen semanttisia puita:*

$$\exists x(P(c) \vee P(F(x))) \to (P(c) \vee \exists y P(y))$$

Tehtävä 348 *Tutki seuraavaa lausetta*

$$\forall x(P(c, d) \to R(x, c, d))$$
$$\to (P(c, d) \to \forall x R(F(x), c, d)).$$

Ratkaise onko lause validi, kontingentti vai ristiriita. Jos lause on validi tai ristiriita, osoita tämä käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita (Katso kappale 2.18). Jos lause on kontingentti, osoita tämä käyttäen semanttisia puita (Katso kappale 2.17).

Tehtävä 349 *Tutki seuraavaa lausetta*

$$(R(c,d) \vee \forall x P(F(x))) \rightarrow \forall x(R(c,d) \vee P(x)).$$

Ratkaise onko lause validi, kontingentti vai ristiriita. Jos lause on validi tai ristiriita, osoita tämä käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita (Katso kappale 2.18). Jos lause on kontingentti, osoita tämä käyttäen semanttisia puita (Katso kappale 2.17).

Tehtävä 350 *Tutki seuraavaa lausetta*

$$\forall x P(F(x), x) \vee \exists x \neg P(x, F(x)).$$

Ratkaise onko lause validi, kontingentti vai ristiriita. Jos lause on validi tai ristiriita, osoita tämä käyttäen luonnollista päättelyä tai semanttisia puita (Katso kappale 2.18). Jos lause on kontingentti, osoita tämä käyttäen semanttisia puita (Katso kappale 2.17).

Tehtävä 351 *Olettakaamme, että L on aakkosta joka koostuu vakiosymbolista ja 1-paikkaisesta funktiosymbolista F. Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on L-struktuuri jolla on universumi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $F^{\mathcal{M}}(a) = a + 1$ kaikille a joukossa $\mathbb{Z}$. Mitkä $\mathbb{Z}$:n alkiot ovat vakiotermien (kuten esimerkiksi c ja $F(c)$) arvoja?*

Tehtävä 352 *Olettakaamme, että L on aakkosto joka koostuu vakiosymboleista c ja d ja 2-paikkaisesta funktiosymbolista F. Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on L-struktuuri jonka universumi koostuu kaikista reaaliluvuista, $c^{\mathcal{M}} = 0, d^{\mathcal{M}} = 1$ ja $F^{\mathcal{M}}(a,b) = a + b$. Mitkä alkiot ovat vakiotermien (kuten esimerkiksi c ja $F(c,c)$) arvoja?*

Tehtävä 353 *Mitkä seuraavista termeistä*

1. $F(y)$
2. $F(z)$
3. $F(x)$

ovat vapaita muuttujalle y kaavassa $\exists x \forall z(R_0(x,y) \vee \neg \forall y R_0(y,x))$?

Tehtävä 354 *Seuraava "luonnollinen päättely" kaavalle $\forall y \exists z \forall x R(z,y,x)$ kaavasta $\forall y \forall x R(F(x),y,x)$ on virheellinen. Mikä virhe siinä on:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y \forall x R(F(x),y,x)}{\forall x R(F(x),y,x)}\ \forall\mathbf{E}}{\exists z \forall x R(z,y,x)}\ \exists\mathbf{T}}{\forall y \exists z \forall x R(z,y,x)}\ \forall\mathbf{T}$$

Tehtävä 355 *Todista käyttäen semanttisia puita seuraava kaava:*

$$\forall x \exists y(R(F(x),x) \rightarrow R(y,x)).$$

Tehtävä 356 *Anna luonnollinen päättely kaavalle*

$$\forall x \exists y(R_0(F(x),x) \vee R_1(y,x))$$

oletuksesta

$$\forall x \forall y(R_0(y,x) \vee R_1(y,x)).$$

Tehtävä 357 *Todista*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow t = t')$$

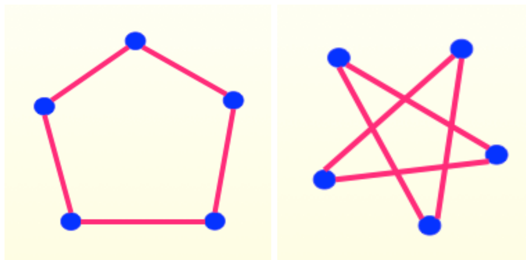
missä t' on saatu muuttujasta t vaihtamalla x_i ja y_i keskenään ($i = 1, \ldots, n$). Käytä identiteettiaksioomia I1-I7 ja luonnollista päättelyä tai semanttista todistusta.

2.21 Isomorfismi

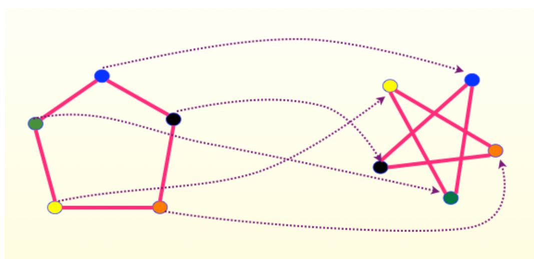
Logiikan iskulause on: "Struktuuri on kaikki kaikessa – alkiot eivät ole mitään." Tätä voisi verrata shakkiin. Pelinappulat voivat olla puisia tai marmorisia, mutta itse peliin se ei vaikuta. Samaan tapaan on outoa kysyä mistä luonnolliset luvut, $0, 1, 2, \ldots$, on "tehty". Ainoa millä on merkitystä on se, että 0 on pienin, sitten tulee 1, sitten 2 jne.

Isomorfismi liittyy tähän ilmiöön. Struktuurilla on enemmän merkitystä, kuin sen alkioilla!

Tähän liittyvä fakta on se, että voimme piirtää kuvan struktuurista monella (isomorfisella) tavalla. Esimerkiksi, verkolla saattaa olla kaksi hyvin erilaista (mutta isomorfista) esitystapaa.



Alla näkyvä kuva näyttää esimerkin isomorfismista kahden yllä olevan verkon välillä:



Kuva 2.27: Isomorfismi

Kuvassa 2.28 on neljä isomorfista yksipaikkaista struktuuria ja indikaatio siitä millaisia niiden isomorfismit ovat.

2.21.1 Tarkka määritelmä verkoille

Emme ole vielä määritellet mitä tarkkaan ottaen tarkoitamme isomorfismilla. Nyt annamme tarkan määritelmän verkoille. Myöhemmin käsittelemme muita struktuureja.

Määritelmä 2.23 *L olkoon verkkoja aakkosto $\{E\}$. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi verkkoa. Sanomme että kuvaus f on isomorfismi $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ jos*

ISO1 *f kuvaa $\mathcal{M}$:n universumin alkiot $\mathcal{M}'$:n universumin alkioille.*

ISO2 *Jokainen $\mathcal{M}'$:n universumin alkio on kuva täsmälleen yhdestä $\mathcal{M}$:n universumin alkiosta.*

ISO3 *Jos a ja b kuuluvat mallin $\mathcal{M}$ universumiin, niin $aE^{\mathcal{M}}b$ jos ja vain jos $f(a)E^{\mathcal{M}'}f(b)$.*

Ehto ISO2 tarkoittaa, että f on bijektio $M \to M'$. Kuva 2.27 on esimerkki bijektiosta joka toteuttaa ehdot ISO1—ISO3.

Nyt näytämme, että täsmälleen samat lauseet ovat tosia isomorfisissa verkoissa. Koska lauseen totuus määritellään sen mukaan miten tulkintafunktio toteuttaa kaavan, käytämme induktiota kaavoissa, lausekkeiden sijaan.

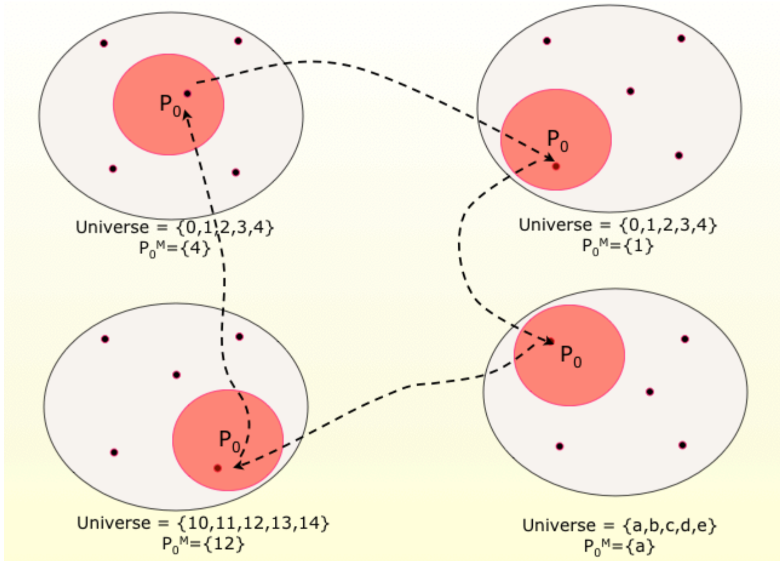
Esittelemme konjugaatin käsitteen hyödyllisenä apukäsitteenä, jotta tuleva todistus olisi helpompi ymmärtää.

Määritelmä 2.24 *Olkooon f on isomorfismi verkosta $\mathcal{M}$ verkkoon $\mathcal{M}'$. Olkoon s tulkintafunktio verkkolle $\mathcal{M}$ ja s' verkkolle $\mathcal{M}'$. Silloin s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen jos kaikille alkioille x pätee $s'(x) = f(s(x))$. Katso Kuva 2.29.*

Proposition 2.25 *Jos s ja s' ovat konjugaatteja, niin kaikille kaavoille A:*

$$\mathcal{M} \models_s A \text{ jos ja vain jos } \mathcal{M}' \models_{s'} A.$$

Proof:
Tapaus 1: A on kaava $x = y$. $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $s(x) = s(y)$, mikä taas implikoi $f(s(x)) = f(s(y))$ ISO1:n nojalla, tämä taas implikoi $s'(x) = s'(y)$ konjugaation nojalla, mikä lopulta implikoi $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toisinpäin, $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi $s'(x) = s'(y)$, joka puolestaan implikoi $f(s(x)) = f(s(y))$ konjugaation nojalla, ja tämä implikoi $s(x) = s(y)$ ISO2:n nojalla, mikä lopulta implikoi $\mathcal{M} \models_s A$.
Tapaus 2: A on atomikaava xEy. $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $s(x)E^{\mathcal{M}}s(y)$, joka taas puolestaan implikoi $f(s(x))E^{\mathcal{M}'}f(s(y))$ ISO3:n nojalla, tämä taas implikoi $s'(x)E^{\mathcal{M}'}s'(y)$ konjugaation nojalla, mikä lopulta implikoi $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toisinpäin, $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi $s'(x)E^{\mathcal{M}'}s'(y)$, mikä taas implikoi $f(s(x))E^{\mathcal{M}'}f(s(y))$ konjugaation nojalla, ja tämä implikoi $s(x)E^{\mathcal{M}}s(y)$ ISO3:n nojalla, mikä lopulta implikoi $\mathcal{M} \models_s A$. .
Tapaus 3: A on $\neg B$ ja väite on jo todistettu kaikille mahdollisille B:lle ja kaikille konjugaateille s ja s' (Induktio-oletus). $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $\mathcal{M} \not\models_s B$, joka taas puolestaan implikoi $M' \not\models_{s'} B$ induktio-oletuksen nojalla, ja vihdoin saamme $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toisinpäin, $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi $\mathcal{M}' \not\models_{s'} B$, joka puolestaan induktio-oletuksen nojalla implikoi $M \not\models_s B$, jolloin vihdoin saamme $\mathcal{M} \models_s A$.



Kuva 2.28: Neljä isomorfista yksipaikkaista struktuuria.

Tapaus 4: A on $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \rightarrow C$ tai $B \leftrightarrow C$. Oletamme Induktio-oletuksena, että väite on jo todistettu B:lle ja C:lle ja konjugaateille s ja s'

Tapaus 5: A on $\exists x B$. Olettakaamme induktio-oletuksena, että väite on jo todistettu B:lle ja kaikille konjugaateille s ja s'. Olettakaamme sitten, että $\mathcal{M} \models_s A$. Tämä implikoi $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$ jollekin a:lle. Huomaa, että $s(a/x)$ ja $s'(f(a)/x)$ ovat konjugaatteja! Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}' \models_{s'(f(a)/x)} B$. Täten $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$ jollekin b:lle, joka taas implikoi $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.

Olettakaamme sitten, että $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Tämä implikoi $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$ jollekin b:lle. ISO2:n nojalla voimme sanoa, että on olemassa a jolloin $f(a) = b$. Huomaa, että molemmat $s(a/x)$ ja $s'(b/x)$ ovat konjugaatteja. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Joten $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$ jollekin a:lle josta voimme johtaa, että $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 6: A on $\forall x B$. Induktio-oletuksena voimme olettaa, että väite on jo todistettu B:lle ja kaikille konjugaateille s ja s' (Loppu jää harjoitustehtäväksi.)

Olemme todistaneet, että $\mathcal{M} \models_s A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ kun $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat isomorfisia verkkoja ja s ja s' ovat konjugaatteja. $\square$

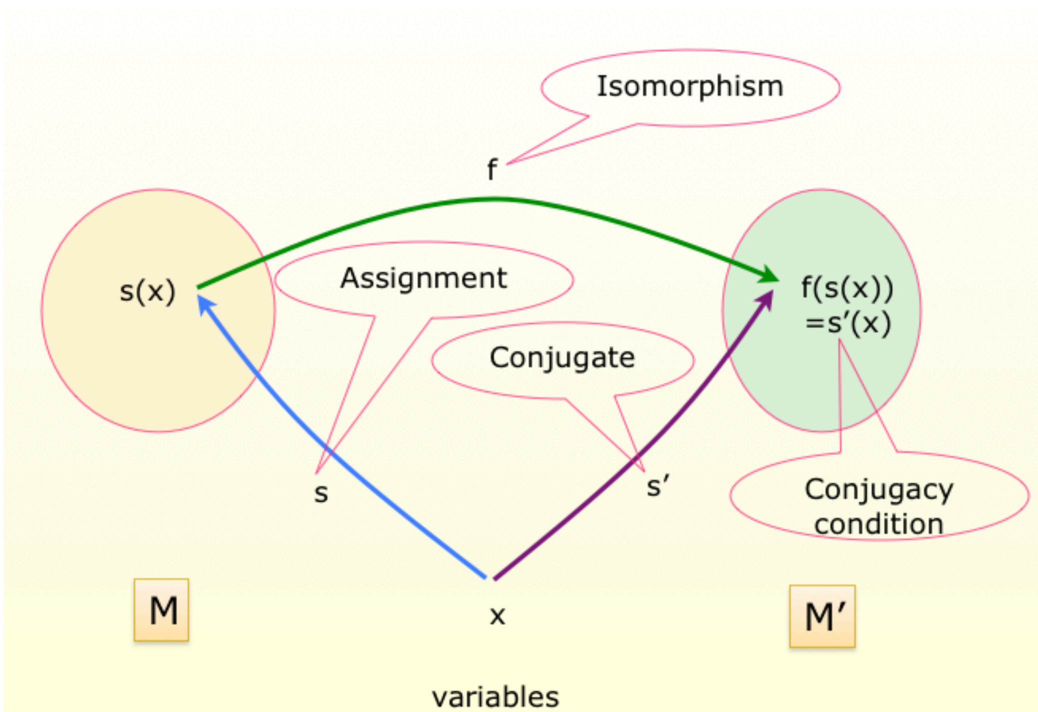
Kun oletamme, että A on lause voimme unohtaa tulkintafunktion ja todeta, että $\mathcal{M} \models A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models A$. Erityisesti, on mahdotonta erotaa verkkoa ja sen isomorfista kopiota käyttämällä predikaattilogiikan lauseita.

Emme voi sanoa mitään verkon solmuista, paitsi ovatko ne identtisiä vai ei, ja ovatko ne naapureita vai ei. Olettakaamme esimerkiksi, että $\mathcal{M}$:n universumi on $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ja $E^{\mathcal{M}} = \{(0, 1)\}$ ja, että $\mathcal{M}'$:n universumi on $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ ja $E^{\mathcal{M}'} = \{(12, 13)\}$. Mikään lause A ei voi "sanoa", että $\mathcal{M}$:n ja $\mathcal{M}'$:n solmut eivät ole samoja tai, että verkon ainoa reuna on "eri paikassa" $\mathcal{M}$:ssä kuin $\mathcal{M}'$:ssä.

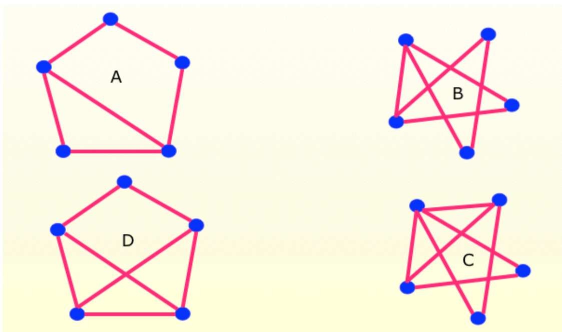
Kaikki yllä mainittu voidaan tehdä millä tahansa mielivaltaisella aakkostolla. Sitä ei ole millään tavalla rajattu verkkoihin.

2.21.2 Ratkotut tehtävät

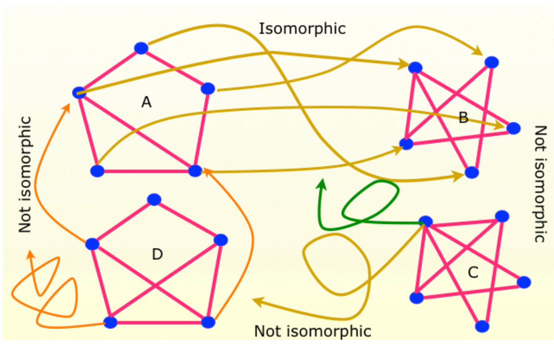
Tehtävä 358 *Mitkä seuraavista verkoista ovat isomorfisia?*



Kuva 2.29: Konjugaatti

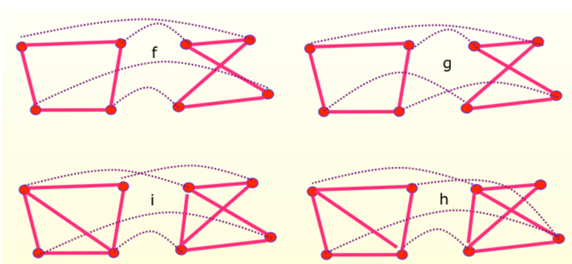


Ratkaisu: Kaksi ylimmäistä ovat isomorfisia muut eivät ole kuten kuvasta näkee.



□

Tehtävä 359 *Mitkä seuraavista funktioista ovat isomorfisia?.*



Ratkaisu: Funktio f ei ole isomorfismi koska se kuvaa vasemmanpuoleisimman reunan loppupisteet solmuihin jotka eivät ole naapureita. Funktio g on isomorfismi minkä näkee jos käy kaikki reunat läpi. Funktio h ei ole isomorfismi koska yksi solmu oikealla puolella on kahden vasemmanpuoleisen solmun kuva. Lopulta funktio i on isomorfismi minkä näkee jos käy kaikki reunat läpi. □

Tehtävä 360 *Todista, että isomorfismi säilyttää totuuden unaarisissa struktuureissa käyttäen seuraavaa määritelmää: Olkoon L aakkosto $\{P_1, \dots, P_n\}$, missä jokainen P_i on unaarinen. Olkoon $\mathcal{M}$:n ja $\mathcal{M}'$:n kaksi L-struktuuria. Sanomme, että kuvaus f on* **isomorfismi** *$\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ jos*

ISO1 *f kuvaa $\mathcal{M}$:n universumin alkiot $\mathcal{M}'$:n universumin alkioille.*

ISO2 *Jokainen $\mathcal{M}'$:n univerusmin alkio on kuva yksikäsitteisestä $\mathcal{M}$:n universumin alkosta.*

ISO3 *Jos a on $\mathcal{M}$:n universumissa niin silloin $P_i^{\mathcal{M}}(a)$ jos ja vain jos $P_i^{\mathcal{M}'}(f(a))$.*

Ratkaisu: Meidän täytyisi näyttää, että samat lauseet pätevät isomorfisissa unaarisissa struktuureissa. Käytämme induktiota kaavojen suhteen. Konjugaatin konsepti on jälleen hyödyllinen.

Todistamme: Jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat isomorfisia ja s ja s' ovat konjugaatteja, kaikille kaavoille A pätee: $\mathcal{M} \models_s A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.

Tapaus 1: A on kaava $x = y$. Kuten ennenkin: $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $s(x) = s(y)$ mikä implikoi $f(s(x)) = f(s(y))$ ISO1:n nojalla, ja tämä implikoi, että $s'(x) = s'(y)$ konjugaatin nojalla, mikä lopulta implikoi $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toiseen suuntaan $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi $s'(x) = s'(y)$ mikä implikoi $f(s(x)) = f(s(y))$ konjugaation nojalla, ja tästä seuraa että $s(x) = s(y)$ ISO2:n nojalla mikä lopulta implikoi $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 2: A on atomikaava malliin $P_i(x)$. $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $s(x) \in P_i^M$ mikä implikoi $f(s(x)) \in P_i^{\mathcal{M}'}$ ISO3:n nojalla tämä implikoi $s'(x) \in P_i^{\mathcal{M}'}$ konjugaation nojalla implikoi että $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Päinvastoin $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi $s'(x) \in P_i^{\mathcal{M}'}$ mikä implikoi, että $f(s(x)) \in P_i^{\mathcal{M}'}$ konjugaation nojalla ja tämä implikoi että $s(x) \in P_i^{\mathcal{M}}$ ISO3:n nojalla mikä lopulta implikoi $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 3: A on $\neg B$ ja väite on jo todistettu kaavalle Bja kaikille konjugaateille s ja s' (Induktio-oletus). kuten ennenkin: $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $M \not\models_s B$ mikä implikoi $\mathcal{M}' \not\models_{s'} B$ Induktio Oletuksen nojalla aj tämä lopulta implikoi $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Päinvastoin $\mathcal{M} \models_{s'} A$ implikoi $\mathcal{M}' \not\models_{s'} B$ mikä implikoi $\mathcal{M} \not\models_s B$ Induktio Oletuksen nojalla ja tämä lopulta implikoi $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 4: A on $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \to C$ tai $B \leftrightarrow C$. Induktio-oletuksena oletamme, että lause on jo todistettu

B:lle ja C:lle ja konjugaateille s ja s'. (Loppu jää harjoitustehtäväksi.)

Tapaus 5: A on $\exists x B$. Olettakaamme, että väite on jo todistettu kaavalle B ja kaikille konjugaateille s ja s' (Induktiooletus). Kuten ennenkin: Olettakaamme ensin, että $\mathcal{M} \models_s A$. Tästä seuraa $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$ joillekin a. Huomaa, että $s(a/x)$ ja $s'(f(a)/x)$ ovat konjugaatteja! induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}' \models_{s'(f(a)/x)} B$. Täten $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$ joillekin b. Tästä seuraa $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.

Olettakaamme sitten, että $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Tästä seuraa $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$ joillekin b. ISO2:n nojalla on olemassa a siten, että $f(a) = b$. Huomaa, että $s(a/x)$ ja $s'(b/x)$ ovat konjugaatteja! Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Täten $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$ joillekin a. Tästä seuraa $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 6: A on $\forall x B$. Olettakaamme, että väite on jo todistettu kaavalle B ja kaikille konjugaateille s ja s' (Induktio-oletus). Yksityiskohdat jäävät harjoitustehtäviksi.

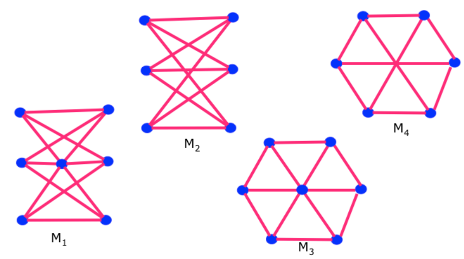
Olemme todistaneet, että $\mathcal{M} \models_s A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ kun $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat isomorfisia unaarisia struktuureja ja s ja s' ovat konjugaatteja. Kun oletamme, että A on lause voimme pudottaa tulkintafunktion ja todeta, että $\mathcal{M} \models A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models A$.

Erityisesti, isomorfisia unaarisia struktuureja ei voi erottaa predikaattilogiikan lauseella.

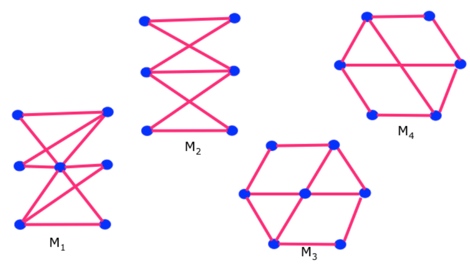
Jos aakkosto L on $\{P\}$, missä P on unaarinenpredikaattisymboli, emme voi sanoa lauseella, mitkä alkiot kuuluvat joukkoon P, vain, kuinka monta alkiota joukkoon kuuluu olettaen, että niitä on äärellinen määrä. Tämän voi nähdä seuraavasti. Olettakaamme, että $\mathcal{M}$:n universumi on $\{0, 1, 2, 3, 4\}, P^{\mathcal{M}} = \{0\}$ ja, että $\mathcal{M}'$:n universumi on $\{0, 1, 2, 3, 4\}, P^{\mathcal{M}} = \{1\}$. Nyt $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat isomorfisia. Mikään lause A ei “sano”, että $\mathcal{M}$:llä ja $\mathcal{M}'$:lla on jokin ero. □

2.21.3 Tehtävät

Tehtävä 361 *Mitkä alla näkyvistä verkoista ovat isomorfisia ja mitkä eivät?*



Tehtävä 362 *Mitkä alla näkyvistä verkoista ovat isomorfisia ja mitkä eivät?*



Tehtävä 363 *Todista, että jos verkko $\mathcal{M}$ on isomorfinen verkon $\mathcal{M}'$ kanssa ja verkko $\mathcal{M}'$ on isomorfinen verkon $\mathcal{M}''$ kanssa niin silloin verkot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}''$ ovat isomorfisia.*

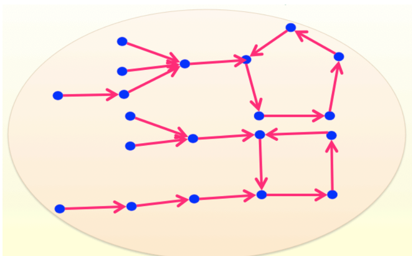
Tehtävä 364 *Todista, että jos verkko $\mathcal{M}$ on isomorfinen struktuurin $\mathcal{M}'$ kanssa niin silloin myös $\mathcal{M}'$ on verkko.*

Tehtävä 365 *Todista, että jokainen verkko jossa on 10 solmua on isomorfinen sellaisen verkon kanssa jolla on $\{1, 2, \ldots, 10\}$ universuminaan.*

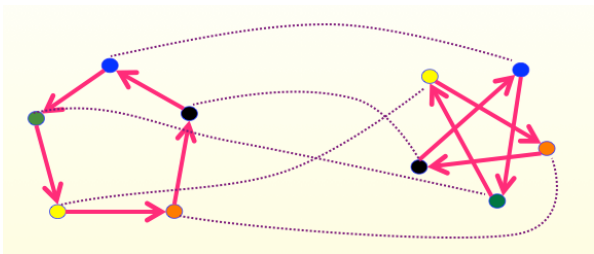
2.22 Lisää isomorfismista

Tähän mennessä olemme keskustelleet isomorfismin käsitteestä vain suhteessa verkkoihin ja 1-paikkaisiin predikaatteihin. Katsokaamme nyt tilannetta missä meillä on aakkosto jossa on pelkästään yksi 1-paikkainen funktio symboli. Alla on kuva 1-paikkaisen funktion struktuurista:

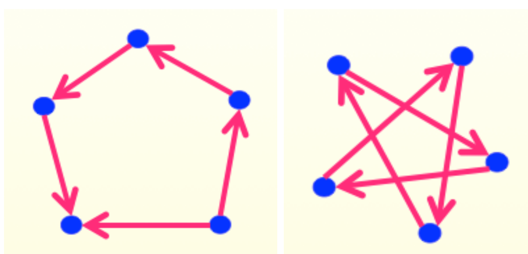
Kuten verkkojenkin kanssa, yhdellä 1-paikkaisella funktiolla saattaa olla monia eri esitysmuotoja:



??



Kuva 2.30: 1-paikkaisten funktioiden isomorfismi.



Kuva 2.30 osoittaa, että nämä kaksi kuvaa kuvaavat todellakin isomorfisia 1-paikkaisia funktioita.

2.22.1 Tarkka määritelmä struktuureille joissa on funktioita.

Yrittäkäämme nyt antaa tarkka määritelmä:

Määritelmä 2.26 *Olkoon L:n aakosta $\{G\}$, missä G on 1-paikkainen funktiosymboli. Olkoon $\mathcal{M}$:n ja $\mathcal{M}'$:n kaksi L-struktuuria. Sanomme, että kuvaus f on isomorfismi $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ jos*

ISO1 *f kuvaa mallin $\mathcal{M}$ universumin alkiot mallin $\mathcal{M}'$ universumin alkioille.*

ISO2 *Jokainen $\mathcal{M}'$:n univerusmin alkio on kuva yksikäsitteisestä $\mathcal{M}$:n universumin alkosta.*

ISO3 *Jos a ja b kuuluvat $\mathcal{M}$ mallin universumiin, niin $b = G^{\mathcal{M}}(a)$ jos ja vain jos $f(b) = G^{\mathcal{M}'}(f(a))$.*

Huomaa: ISO3 sanoo, että $f(G^{\mathcal{M}}(a)) = G^{\mathcal{M}'}(f(a))$ kaikille a:n arvoille.

Esimerkki isomorfisesta struktuurista jossa oli 1-paikkainen funktio näkyy Kuvassa 2.30.

2.22.2 Isomorfismi säilyttää totuuden

Todistamme, että samat lauseet ovat tosia isomorfisissa L-struktuureissa, myös 1-paikkaisten funktioiden kohdalla. Käytämme induktiota kaavojen suhteen.

Muistelkaa tulkintafunktioiden konjugaation käsitettä Määritelmässä 2.24 ja Kuvassa 2.29: Olettakaamme, että f on $\mathcal{M}$ ja sen isomorfinen kuva $\mathcal{M}'$. Olettakaamme, että s on $\mathcal{M}$:n tulkintafunktio ja s' on $\mathcal{M}'$:n tulkintafunktio. Tällöin s ja s' ovat konjugaatteja suhteessa isomorfismiin f, jos kaikille muuttujille x, $s'(x) = f(s(x))$.

Todistamme ensin alustavan lemman:

Lemma 2.27 *Jos s ja s' ovat konjugaatteja, niin silloin kaikille termeille t:*

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

Proof:
Tapaus 1: t on vakio c. Tämä ei ole mahdollista koska aakkostomme L ei tällä kertaa sisällä vakio symboleja.
Tapaus 2: t on muuttuja x. Nyt konjugaation nojalla

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(x^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$$

$$= f(s(x)) = s'(x) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

Tapaus 3: t on funktiotermi $G(t')$. Oletamme induktio-oletuksena, että

$$f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$$

. Nyt ISO3:n nojalla

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(G(t')^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$$

$$= f(G^{\mathcal{M}}(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) = G^{\mathcal{M}'}(f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) = G^{\mathcal{M}'}(t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle)$$

$$= G(t')^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

□

Nyt totuuden säilyminen:

Proposition 2.28 *Jos s ja s' ovat konjugaatteja, niin silloin kaikille kaavoille A: $\mathcal{M} \models_s A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.*

Proof: Tapaus 1: A on yhtälö $t = t'$. $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle,$$

mikä ISO1:n nojalla implikoi

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle),$$

joka taas Lemman 2.27 nojalla implikoi

$$t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle,$$

mistä voidaan lopulta johtaa $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toisinpäin, $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi

$$t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle,$$

mistä taas voidaan johtaa, että lemman 2.27 nojalla, että

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle).$$

ISO2:n nojalla tästä voidaan taas johtaa, että

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$$

joka implikoi $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 2: A on $\neg B$ ja väite on jo todistettu B:lle ja konjugaateille s ja s' (Induktio-oletus). Kuten ennen: $\mathcal{M} \models_s A$ implikoi $M \not\models_s B$, mistä taas voidaan johtaa induktio-oletuksen nojalla $M' \not\models_{s'} B$, josta lopulta johdetaan $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toisinpäin, $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ implikoi $\mathcal{M}' \not\models_{s'} B$, mistä induktio-oletuksen nojalla voidaan johtaa että $M \not\models_s B$, joka viimein implikoi $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 3: Olettakaamme, että väite on jo todistettu B:lle ja C:lle ja konjugaateille s ja s' (induktio-oletus). Silloin väite pätee lausekkeille $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \to C$ ja $B \leftrightarrow C$. (Tehtävä)

Tapaus 4: A is $\exists x B$. Olettakaamme, että väite on jo todistettu B:lle ja konjugaateille s ja s' (induktio-oletus).

Kuten ennen: Olettakaamme ensin, että $\mathcal{M} \models_s A$. Tästä voimme johtaa, että $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$ jollekin A:lle. Huomaa, että $s(a/x)$ ja $s'(f(a)/x)$ ovat konjugaatteja! Induktio-oletuksen nojalla voimme johtaa, että $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Täten $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$ jollekin b:lle. Tästä seuraa $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.

Olettakaamme nyt, että $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Tästä voidaan johtaa, että jollekin b:lle $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$. ISO2:n nojalla on olemassa a ja b jolloin $f(a) = b$. Huomaa, että $s(a/x)$ ja $s'(b/x)$ ovat konjugaatteja! Induktio-oletuksen nojalla voimme johtaa $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Täten $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$ jollekkin a:lle. Tästä voimme johtaa $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus 5: A is $\forall x B$. Olettakaamme, että väite on jo todistettu B:lle ja konjugaateilla s ja s' (induktio-oletus). Yksityiskohdat jätetty harjoitustehtäväksi.

□

Olemme todistaneet, että $\mathcal{M} \models_s A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, kun $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat isomorfisia L-struktuureja ja s ja s' ovat konjugaatteja. Kun oletamme, että A on lause, voimme unohtaa tulkintafunktion ja todeta $M \models A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models A$.

Erityisesti, on mahdotonta erottaa isomorfisia L-struktuureita käyttämällä predikaattilogiikan lauseita.

2.22.3 Esimerkki

Emme voi sanoa mitään L-struktuurin alkioista, $L = \{G\}$, paitsi mitä voidaan esittää funktion G avulla. Katsotaan kahta mallia:

$\mathcal{M}$**:** $\mathcal{M}$:n universumi on $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $G^{\mathcal{M}}(a) = 0$ kaikille a:n arvoille.

$\mathcal{M}'$**:** $\mathcal{M}'$:n universumi on $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $G^{\mathcal{M}'}(a) = 1$ kaikille a:n arvoille.

Mikään lause A ei voi "sanoa", että vakiofunktiot $\mathcal{G}^{\mathcal{M}}$ ja $\mathcal{G}^{\mathcal{M}'}$ ovat erilaisia koska funktio $f(0) = 1, f(1) = 0, f(a) = a$ jos $a \in \{2, 3, 4\}$ on isomorfismi $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$.

2.22.4 Nyt yleinen tapaus

Kaikki yllämainittu voitaisi tehdä millä tahansa aakkostolla – se ei ole millään lailla rajoittunut yksinomaan verkkoihin, 1-paikkaisiin predikaatteihin tai 1-paikkaisiin funktioihin rajoittunut. Isomorfismin yleinen määritelmä on seuraava:

Määritelmä 2.29 *Olkoon L aakkosto. Olkoon $\mathcal{M}$:n ja $\mathcal{M}'$:n kaksi L-struktuuria. Sanomme, että kuvaus f on isomorfismi $\mathcal{M}$:stä $\mathcal{M}'$:ään jos*

ISO1 *f kuvaa alkiot $\mathcal{M}$ mallin universumin alkiot $\mathcal{M}'$ mallin universumin alkioille.*

ISO2 *Jokainen $\mathcal{M}'$:n univerusmin alkio on kuvaa yksikäsitteisestä $\mathcal{M}$:n universumin alkosta.*

ISO3 *On kolme tapausta:*

1. *Jos c on vakio symboli L:ssä, niin silloin $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$.*
2. *Jos R_i^n on L:ssä, niin silloin*

   $(a_1, \dots, a_n) \in (R_i^n)^{\mathcal{M}}$ *jos ja vain jos* $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in (R_i^n)^{\mathcal{M}'}$

   pätee kaikille $a_1, \dots, a_n$ $\mathcal{M}$:n universumissa.
3. *Jos F_i^n on L:ssä, niin silloin yhtälö*

   $$f((F_i^n)^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = (F_i^n)^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

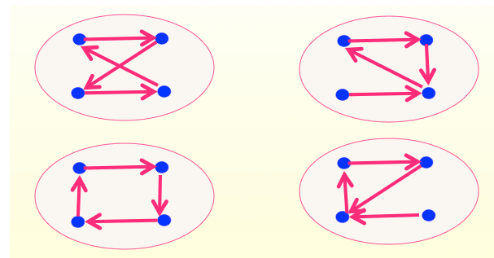
   pätee kaikille $a_1, \dots, a_n$ $\mathcal{M}$:n universumissa.

2.22.5 Järjestetyt joukot

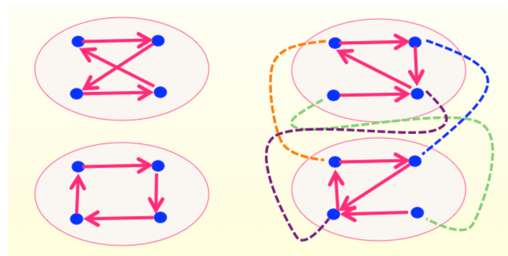
Tarkastellaan aakkostoa $L = \{<\}$. L-struktuurit jotka toteuttavat järjestysaksioomat ovat nimeltään järjestettyjä joukkoja. Äärelliset järjestetyt joukot, joissa on sama määrä alkioita, ovat isomorfisia. Seuraavat neljä järjestettyä joukkoa eivät ole isomorfisia keskenään: Kokonaisluvut, positiiviset kokonaisluvut, rationaaliluvut ja reaaliluvut. Miksi ne eivät ole isomorfisia? Positiivisissa kokonaisluvuissa on pienin alkio (0), kun taas muissa joukoissa ei ole. Kokonaisluvuissa jokaisella alkiolla on välitön seuraaja, kun taas rationaali ja reaaliluvuissa ei ole. Rationaaliluvuissa ei ole mitään alkiota a siten, että $b < a < c$ kaikille rationaaliluvuille b ja c missä $b^2 < 2$ ja $c^2 > 2$ kun taas reaaliluvuissa on, nimittäin $\sqrt{2}$.

2.22.6 Ratkotut tehtävät

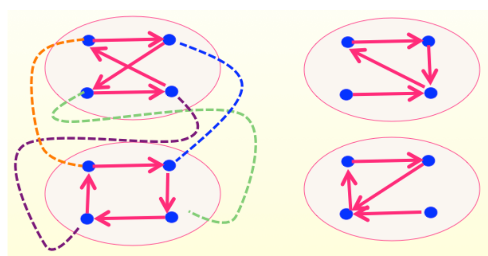
Tehtävä 366 *Mitkä seuraavista struktuureista joilla on unaarinen funktio ovat isomorfisia? Mitkä lauseet erottavat epäisomorfiset struktuurit?*



Ratkaisu: Kaksi struktuuria oikealla ovat isomorfisia:



Samaan tapaan, kaksi struktuuria vasemmalla ovat isomorfisia:



Miettikäämme mikä olisi lause joka erottaisia vasemman puoleiset struktuurit oikean puoleisilta ja täten tekisi niiden isomorfisuudesta mahdottomuuden. Vasemmalla puolella jokainen alkio on kuva vain ja ainoastaan yhdestä alkiosta, kun taas jotkut oikean puolen alkiot ovat kahden eri alkion kuvia. Täten lause joka on tosi molemmissa oikeanpuoleisissa struktuureissä, muttei kummassakaan vasemman puoleisessa struktuurissa, on:

$$\exists x \exists y (F(x) = F(y) \land \neg x = y).$$

□

Tehtävä 367 *Mitkä seuraavista struktuureista joilla on unaarinen funktio ovat isomorfisia. Mitkä lauseet erottavat ei isomorfiset struktuurit?*

$\mathcal{M}$: *Luonnolliset luvut varustettua funktiolla $g(a) = a$ jos a on parillinen ja $g(a) = 1$ muuten.*

$\mathcal{M}'$: *Luonnolliset luvut varustettua funktiolla $g'(a) = 0$ jos a on parillinen ja $g'(a) = a$ muuten.*

$\mathcal{M}''$: *Luonnolliset luvut varustettua funktiolla $g''(a) = 0$ jos a on parillinen ja $g''(a) = 1$ muuten.*

Ratkaisu: Ensimmäiset kaksi mallia ovat isomorfisia kuten funktio $f(2n) = 2n + 1$, $f(2n + 1) = 2n$ näyttää. Tarkistakaamme tämä: Olettakaamme, että a on luonnollinen luku. Silloin $a = 2n$ tai $a = 2n + 1$ jollekin n. Ensimmäisessä tapauksessa saamme seuraavan tuloksen:

$$f(G(a)^{\mathcal{M}}) = f(G(2n)^{\mathcal{M}}) = f(g(2n)) =$$

$$= f(2n) = 2n + 1$$

ja

$$G(f(a))^{\mathcal{M}'} = G(f(2n))^{\mathcal{M}'} = G(2n+1)^{\mathcal{M}'} =$$

$$= g'(2n + 1) = 2n + 1.$$

Toisaalta jos $a = 2n + 1$ saamme seuraavan tuloksen:

$$f(G(a)^{\mathcal{M}}) = f(G(2n+1)^{\mathcal{M}}) = f(g(2n+1)) =$$

$$= f(1) = 0$$

ja

$$G(f(a))^{\mathcal{M}'} = G(f(2n+1))^{\mathcal{M}'} = G(2n)^{\mathcal{M}'} =$$

$$= g'(2n) = 0.$$

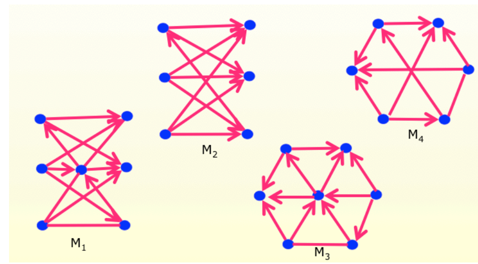
Malli $\mathcal{M}''$ ei ole isomorfinen kahden ensimmäisen kanssa. Esimerkki lauseesta joka erottaisi nämä olisi

$$\exists x \exists y \forall z (G(z) = x \vee G(z) = y).$$

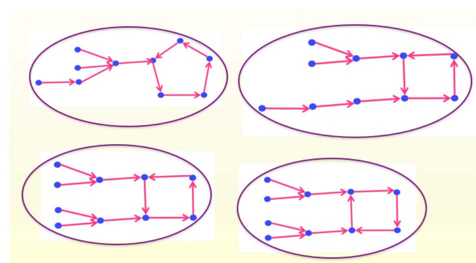
Tämä lause on selvästi totta mallissa $\mathcal{M}''$, muttei malleissa $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$. $\Box$

2.22.7 Tehtävät

Tehtävä 368 *Mitkä seuraavista struktuureista, joilla kaikilla on unaarinen funktio, ovat isomorfisia ja mitkä eivät?*



Tehtävä 369 *Mitkä seuraavista struktuureista, joilla kaikilla on unaarinen funktio, ovat isomorfisia ja mitkä eivät?*



Tehtävä 370 *Olettakaamme, että $\mathcal{M}$ on struktuuri ja s on tulkintafunktio struktuurille $\mathcal{M}$. Olettakaamme, että f on yksi isomorfismi mallista $\mathcal{M}$ malliin $\mathcal{M}'$. Näytä, että on yksi ja vain yksi tulkintafunktio s' siten, että s ja s' ovat konjugaatteja suhteessa f.*

Tehtävä 371 *Näytä tarkasti, että seuraavat järjestetyt joukot ovat kaikki ei-isomorfisia keskenään:*

1. *Kokonaisluvut.*
2. *Positiiviset kokonaisluvut.*
3. *Rationaaliluvut.*
4. *Reaaliluvut.*

Tehtävä 372 *Todista mielivaltaisella aakkostolla, että isomorfiset struktuurit toteuttavat samat lauseet.*

Tehtävä 373 *Olkoon L aakkosto $\{R\}$ missä $\{R\}$ on binäärinen predikaattisymboli. Tarkastellaan L-struktuuria $\mathcal{M}$ minkä universumi on kaikkien rationaalilukujen joukko (esimerkiksi murtoluvut muodossa m/n, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$) ja missä $R^{\mathcal{M}}$ on kaikkien parien (a, b) joukko siten, että $a < b$. Olkoon $\mathcal{M}'$:n L-struktuuri jonka universumi on kaikkien rationaalilukujen $\neq 0$, joukko ja missä $R^{\mathcal{M}}$ on taas kaikkien parien (a, b) joukko siten, että $a < b$. Ovatko struktuurit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ isomorfisia vai ei? (Tämä tehtävä on muita hieman haastavampi.)*

Hakemisto