Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

14.4.2014

Käytännön asioita

- Pääsiäisloma 17.–23.4.
  - ei luentoja
  - ei ohjausta (ohjausluokassa tai Ratkomossa)
- Exactum avoinna
  - ke 16.4. 7.45–18.00
  - to 17.4. 7.45–16.00
  - ensi tiistaista lähtien normaalisti
- Koeviikolla ohjaus maanantaina tai tiistaina – seuraa nettisivua!
- (ei-palautettavia) kertaustehtäviä tulossa

Kaksipaikkaisten funktioiden isomorfismi

$L = \{G\}$, G kaksipaikkainen funktiosymboli

Määritelmä

Kaksi struktuuria $\mathcal{M} = (M, G^{\mathcal{M}})$ ja $\mathcal{M}' = (M', G^{\mathcal{M}'})$ ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f : M \to M'$, jolla

$$f(G^{\mathcal{M}}(a, b)) = G^{\mathcal{M}'}(f(a), f(b))$$

kaikilla $a, b \in M$.

Vertailua algebraan

Algebrassa ryhmähomomorfismi määritellään seuraavasti:

Määritelmä

Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvaus $f : G \to H$ on *ryhmähomomorfismi*, jos kaikilla $x, y \in G$ pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Onko homomorfismi ryhmien isomorfismi

- aina?
- joskus?
- ei koskaan?

Isomorfismi

Määritelmä

Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi L-mallia. Funktio f on *isomorfismi* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, jos

1. f on bijektio $f : \mathrm{dom}(\mathcal{M}) \to \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$
2. jokaisella vakiosymbolilla $c \in L$ pätee

$$f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$$

. . .

Isomorfismi, jatk.

Määritelmä

3. jokaisella n-paikkaisella relaatiosymbolilla $R \in L$ ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \quad \text{joss} \quad (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{M}'}$$

4. jokaisella n-paikkaisella funktiosymbolilla $F \in L$ ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee

$$f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$$

Isomorfisten mallien samanlaisuus

- Isomorfiset mallit toteuttavat samat lauseet (todistetaan seuraavaksi)
- On olemassa malleja, jotka toteuttavat samat lauseet, mutta eivät ole isomorfisia (todistetaan malliteorian kurssilla)

Konjugoidut tulkintafunktiot

Määritelmä

Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi isomorfista mallia ja $f : M \to M'$ niiden välinen isomorfismi. $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s ja $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio s' ovat *konjugaatteja* f:n suhteen, jos kaikille muuttujille x pätee

$$s'(x) = f(s(x)).$$

Isomorfismi ja termit

Lemma

Olkoot $\mathcal{M}$ ja M' kaksi isomorfista L-mallia, s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, s' $\mathcal{M}'$ tulkintafunktio ja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ isomorfismi niin, että s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen. Tällöin jokaiselle L-termille t pätee

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s' \rangle.$$

Todistus induktiolla termin rakenteen suhteen:

$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$, todistus

Tapaus 1 t on muuttuja x. Tällöin

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = x^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x)$$

ja

$$t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = x^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = s'(x).$$

Koska s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen, on

$$f(s(x)) = s'(x)$$

joten

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(s(x)) = s'(x) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$, todistus (jatk.)

Tapaus 2 t on vakiosymboli c. Tällöin

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c^{\mathcal{M}}$$

ja

$$t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = c^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = c^{\mathcal{M}'}.$$

Koska f on isomorfismi, on

$$f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$$

joten

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(c^{M}) = c^{\mathcal{M}'} = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$, todistus (jatk.)

Tapaus 3 t on termi $F^n(t_1, \ldots, t_n)$ ja (induktio-oletus:) kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $f(t_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t_i^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$. Tällöin

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = (F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$$

ja

$$t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = (F^n)^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle)$$

Nyt

$$\begin{aligned}
f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) &\overset{\text{määr}}{=} f((F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\
&\overset{f\ \text{isom.}}{=} (F^n)^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \ldots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\
&\overset{\text{ind.ol.}}{=} (F^n)^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle) \\
&\overset{\text{määr}}{=} t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.
\end{aligned}$$

Isomorfismi säilyttää kaavan totuuden

Lause

Olkoot $\mathcal{M}$ ja M' kaksi isomorfista L-mallia, s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, s' $\mathcal{M}'$ tulkintafunktio ja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ isomorfismi niin, että s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen. Tällöin jokaiselle L-kaavalle A pätee

$$\mathcal{M} \models_s A \quad \textit{jos ja vain jos} \quad \mathcal{M}' \models_{s'} A.$$

Todistus induktiolla kaavan A rakenteen suhteen, samanaikaisesti kaikille tulkintafunktioille s ja s', jotka ovat konjugaatteja f:n suhteen:

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus

Alkuaskel 1, A on kaava $t_1 = t_2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models_s t_1 = t_2 &\overset{\text{määr}}{\text{joss}}\ t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \\
&\overset{f\text{ bij.}}{\text{joss}}\ f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \\
&\overset{\text{lemma}}{\text{joss}}\ t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t_2^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle \\
&\overset{\text{määr}}{\text{joss}}\ \mathcal{M}' \models_{s'} t_1 = t_2
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus (jatk.)

Alkuaskel 2, A on kaava $R(t_1, \ldots, t_n)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models_s R(t_1, \ldots, t_n) &\overset{\text{määr}}{\text{joss}} (t_1^{\mathcal{M}}\langle s \rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s \rangle) \in R^{\mathcal{M}} \\
&\overset{f \text{ isom.}}{\text{joss}} (f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s \rangle), \ldots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s \rangle)) \in R^{\mathcal{M}'} \\
&\overset{\text{lemma}}{\text{joss}} (t_1^{\mathcal{M}'}\langle s' \rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s' \rangle) \in R^{\mathcal{M}'} \\
&\overset{\text{määr}}{\text{joss}} \mathcal{M}' \models_{s'} R(t_1, \ldots, t_n)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus (jatk.)

Induktioaskel 1, A on $\neg B$ ja (induktio-oleuts:) $\mathcal{M} \models_s B$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} B$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models_s \neg B \ &\overset{\text{määr}}{\text{joss}}\ \mathcal{M} \not\models_s B \\
&\overset{\text{ind.ol.}}{\text{joss}}\ \mathcal{M}' \not\models_{s'} B \\
&\overset{\text{määr}}{\text{joss}}\ \mathcal{M}' \models_{s'} \neg B
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus (jatk.)

Induktioaskel 2, A on $B \wedge C$ ja (induktio-oleuts:) $\mathcal{M} \models_s B$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ sekä $\mathcal{M} \models_s C$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} C$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models_s B \wedge C \ &\overset{\text{määr}}{\text{joss}} \ \mathcal{M} \models_s B \text{ ja } \mathcal{M} \models_s C \\
&\overset{\text{ind.ol.}}{\text{joss}} \ \mathcal{M}' \models_{s'} B \text{ ja } \mathcal{M}' \models_{s'} C \\
&\overset{\text{määr}}{\text{joss}} \ \mathcal{M}' \models_{s'} B \wedge C
\end{aligned}$$

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus (jatk.)

Induktioaskel 3–5, $A \in \{B \vee C, B \to C, B \leftrightarrow C\}$ **ja (induktio-oleuts:)** $\mathcal{M} \models_s B$ **jos ja vain jos** $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ **sekä** $\mathcal{M} \models_s C$ **jos ja vain jos** $\mathcal{M}' \models_{s'} C$

Vastaavasti (Tarskin totuusmääritelmän mukaisesti).

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus (jatk.)

Induktioaskel 6, A on kaava $\exists xB$ ja (induktio-oleuts:) $\mathcal{M} \models_s B$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ kaikilla tulkintafunktioilla s ja s', jotka ovat konjugaatteja f:n suhteen

Oletetaan $\mathcal{M} \models_s \exists xB$.
Tällöin jollakin $a \in M$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$.
Koska s ja s' ovat konjugaatteja pätee kaikilla muilla muuttujilla *paitsi x:llä*

$$f(s(a/x)(y)) = f(s(y)) = s'(y) = s'(f(a)/x)(y).$$

Lisäksi

$$f(s(a/x)(x)) = f(a) = s'(f(a)/x)(x),$$

siis $s(a/x)$ ja $s'(f(a)/x)$ ovat konjugaatteja f:n suhteen

Oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$.
Lisäksi $s(a/x)$ ja $s'(f(a)/x)$ ovat konjugaatteja f:n suhteen.
Induktio-oletuksen nojalla

$$\mathcal{M}' \models_{s'(f(a)/x)} B$$

ja koska $f(a) \in M'$, pätee

$$\mathcal{M}' \models_{s'} \exists x B.$$

toinen suunta!

Oletetaan, että $\mathcal{M}' \models_{s'} \exists x B$.
Tällöin jollakin $b \in M'$ pätee $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$.
Koska f on surjektiivinen, on olemassa $b' \in M$, jolla $f(b') = b$. Lisäksi $s(b'/x)$ ja $s'(f(b')/x) = s'(b/x)$ ovat konjugaatteja f:n suhteen.

Induktio-oletuksen nojalla

$$\mathcal{M} \models_{s(b'/x)} B$$

ja edelleen

$$\mathcal{M} \models_s \exists x B.$$

$\mathcal{M} \models_s A$ joss $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, todistus (jatk.)

Induktioaskel 7, A **on kaava** $\forall x B$ **ja (induktio-oleuts:)** $\mathcal{M} \models_s B$ **jos ja vain jos** $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ **kaikilla tulkintafunktioilla** s **ja** s'**, jotka ovat konjugaatteja** f**:n suhteen**

Vastaavasti.

Isomorfiset mallit toteuttavat samat lauseet

Seuraus

Olkoot $\mathcal{M}$ ja M' kaksi isomorfista L-mallia ja A L-lause. Tällöin

$$\mathcal{M} \models A \quad \textit{jos ja vain jos} \quad \mathcal{M}' \models A.$$

Oletetaan, että $\mathcal{M} \models A$.
Osoitetaan, että $\mathcal{M}' \models A$.
Olkoon $f : \mathcal{M} \to M'$ isomorfismi.

Olkoon s' mielivaltainen $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio. Määritellään $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s seuraavasti:

$$s(x) = f^{-1}(s'(x))$$

jokaisella x. Tällöin s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen. Oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s A$

$$\mathcal{M}' \models_{s'} A.$$

Koska s' oli mielivaltainen, pätee $\mathcal{M}' \models A$.

Toinen suunta vastaavasti.