

Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

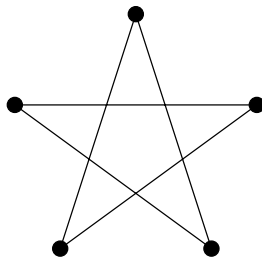
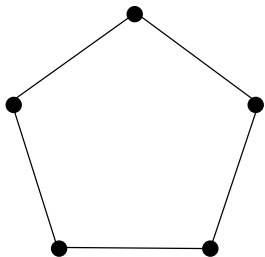
11.4.2014

Käytännön asioita

- Pääsiäisloma 17.–23.4.
 - ▶ ei luentoja
 - ▶ ei ohjausta (ohjausluokassa tai Ratkomossa)
- luentoja jäljellä
 - ▶ ma 14.4. (lisää isomorfismista)
 - ▶ pe 25.4. (kertaus)
- Koeviikon ohjaus selviää myöhemmin – seuraa nettisivua!

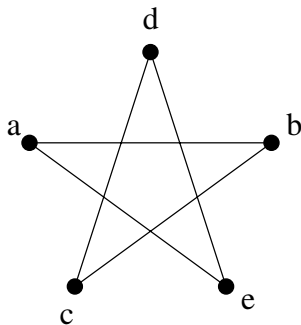
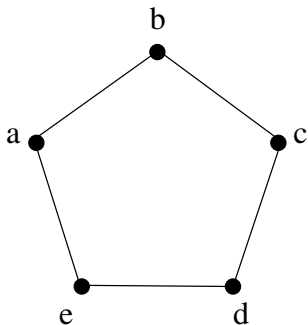
Esimerkki

Ovatko seuraavat verkot samat?



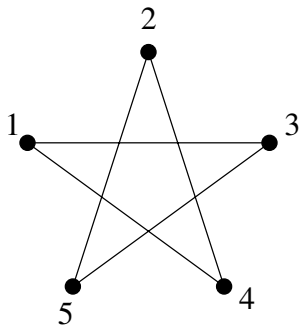
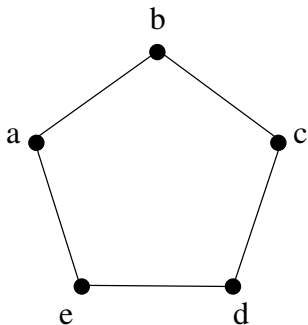
Esimerkki

Entä ovatko seuraavat verkot samat?



Esimerkki

Entä nämä? Ovatko samat?



Bijektio

Määritelmä

Funktio $f : A \rightarrow B$ on *bijektio*, jos se on funktio A :lta B :lle ja täyttää seuraavat ehdot:

- 1 (injektiivisyys) Jos $f(a) = f(a')$, niin $a = a'$.
- 2 (surjektiivisyys) Kaikilla $b \in B$ on olemassa $a \in A$, jolla $f(a) = b$.

Verkkoisomorfismi

$$L = \{E\}.$$

Määritelmä

Kaksi verkkoa \mathcal{G} ja \mathcal{G}' ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f : \text{dom}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{dom}(\mathcal{G}')$, jolla pätee

$$(a, b) \in E^{\mathcal{G}} \quad \text{joss} \quad (f(a), f(b)) \in E^{\mathcal{G}'}$$

kaikilla $a, b \in \text{dom}(\mathcal{G})$.

Unaaristen struktuurien isomorfismi

$$L = \{P_0, \dots, P_{n-1}\}$$

Määritelmä

Kaksi unaarista struktuuria \mathcal{M} ja \mathcal{M}' ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f : \text{dom}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{dom}(\mathcal{M}')$, niin että kaikilla $i < n$ pätee

$$a \in P_i^{\mathcal{M}} \quad \text{joss} \quad f(a) \in P_i^{\mathcal{M}'}$$

kaikilla $a \in \text{dom}(\mathcal{M})$.

Yksipaikkaisten funktioiden isomorfismi

$L = \{F\}$, F yksipaikkainen funktiosymboli

Määritelmä

Kaksi struktuuria $\mathcal{M} = (M, F^{\mathcal{M}})$ ja $\mathcal{M}' = (M', F^{\mathcal{M}'})$ ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f : M \rightarrow M'$, jolla

$$f(F^{\mathcal{M}}(a)) = F^{\mathcal{M}'}(f(a))$$

kaikilla $a \in M$.

Kaksipaikkaisten funktioiden isomorfismi

$L = \{G\}$, G kaksipaikkainen funktiosymboli

Määritelmä

Kaksi struktuuria $\mathcal{M} = (M, G^{\mathcal{M}})$ ja $\mathcal{M}' = (M', G^{\mathcal{M}'})$ ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f : M \rightarrow M'$, jolla

$$f(G^{\mathcal{M}}(a, b)) = G^{\mathcal{M}'}(f(a), f(b))$$

kaikilla $a, b \in M$.

Vertailua algebraan

Algebrassa ryhmähomomorfismi määritellään seuraavasti:

Määritelmä

Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvaus $f : G \rightarrow H$ on *ryhmähomomorfismi*, jos kaikilla $x, y \in G$ pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Onko homomorfismi ryhmien isomorfismi

- aina?
- joskus?
- ei koskaan?