Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

4.4.2014

Semanttisen todistuksen eheys

Lause

Jos kaavalla A on semanttinen todistus, A on validi.

Todistamme seuraavan lemman:

Lemma

Jos L-kaava A on toteutuva, niin lauseen A jokaisessa semanttisessa puussa on avoin oksa.

Lemman todistus(hahmotelma)

Oletamme, että $\mathcal{M} \models_s A$.

Olkoon $\mathcal{P}$ kaavan A semanttinen puu.

Induktio puun rakenteen suhteen: etenemme puussa alaspäin ja huolehdimme, että kun olemme kaavan B kohdalla, on olemassa malli ja tulkintafunktio, jotka toteuttavat kaikki oksan kaavat B:hen asti.

Alkuaskel

On osoitettava, että puun juuri on toteutuva. Mutta tämä oli oletus ($\mathcal{M} \models_s A$).

Induktioaskel – idea

Induktio-oletus:

- Olemme edenneet puussa kaavaan B s.e. $\mathcal{M}$ ja s toteuttavat kaikki aiemmat kaavat oksalla.
- Emme ole keskellä säännön soveltamista.

Jatko riippuu siitä, mitä sääntöä oksalla sovellettu seuraavaksi.

Induktioaskel - konjunktio 1

Seuraavat kaavat ovat tulleet ensimmäisen konjunktiosäännön nojalla, eli puussa kohta:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ B \\ | \\ C \\ | \\ D \\ | \\ \vdots \end{array}$$

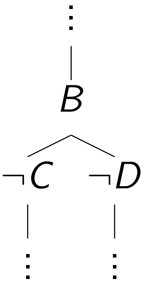
ja kaava $C \wedge D$ esiintyy aikaisemmin oksalla.

Induktioaskel - konjunktio 1, jatk.

Nyt induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s C \wedge D$, joten (Tarskin totuusmääritelmän nojalla) $\mathcal{M} \models_s C$ ja $\mathcal{M} \models_s D$. Voimme edetä kaksi askelta alaspäin puussa ja induktio-oletus pysyy voimassa.

Induktioaskel - konjunktio 2

Seuraavat kaavat ovat tulleet toisen konjunktiosäännön nojalla, eli puussa kohta:



ja kaava $\neg(C \wedge D)$ esiintyy aikaisemmin oksalla.

Induktioaskel - konjunktio 2, jatk.

Nyt induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s \neg(C \wedge D)$, joten $\mathcal{M} \not\models_s C \wedge D$, eli $\mathcal{M} \not\models_s C$ tai $\mathcal{M} \not\models_s D$, eli $\mathcal{M} \models_s \neg C$ tai $\mathcal{M} \models_s \neg D$. Valitsemme haaran sen mukaan, kumpi toteutuu, ja etenemme puussa yhden askeleen eteenpäin ja induktio-oletus pysyy voimassa.

Induktioaskel – muut konnektiivit

- $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ vastaavasti
- kaksoisnegaation poisto vastaavasti
- oksan sulkemissääntöön ei päästä (induktio-oletuksen nojalla)

Induktioaskel – universaalikvanttori 1

Seuraava kaava on tullut ensimmäisen universaalikvanttorisäännön nojalla, eli puussa kohta:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
| \\
B \\
| \\
C(t/x) \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

ja kaava $\forall x C$ esiintyy aikaisemmin oksalla.

Induktioaskel – universaalikvanttori 1, jatk.

Nyt induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s \forall x C$. Olkoon $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$. Tarskin totuusmääritelmän nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} C$ ja edelleen sijoituslemman nojalla $\mathcal{M} \models_s C(t/x)$. (Jos t:llä ei vielä ole tulkintaa mallissa $\mathcal{M}$, se voidaan valita vapaasti laajentamalla aakkostoa). Voimme edetä askeleen alaspäin puussa ja induktio-oletus pysyy voimassa.

Induktioaskel – universaalikvanttori 2

Seuraava kaava on tullut toisen universaalikvanttorisäännön nojalla, eli puussa kohta:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ B \\ | \\ \neg C(c_i/x) \\ | \\ \vdots \end{array}$$

ja kaava $\neg\forall x C$ esiintyy aikaisemmin oksalla.

Induktioaskel – universaalikvanttori 2, jatk.

Nyt induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s \neg\forall xC$, eli $\mathcal{M} \not\models_s \forall xC$. Siis on olemassa alkio $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, s.e. $\mathcal{M} \not\models_{s(b/x)} C$, eli $\mathcal{M} \models_{s(b/x)} \neg C$. Koska c_i on uusi vakiosymboli, sillä ei vielä ole tulkintaa, joten valitsemalla $c_i^{\mathcal{M}} = b$ saamme (sijoitsulemman nojalla) $\mathcal{M} \models_s \neg C(c_i/x)$. Voimme edetä askeleen alaspäin puussa ja induktio-oletus pysyy voimassa.

Induktioaskel – eksistenssikvanttori

Eksistenssikvanttorin säännöt käydään läpi vastaavasti.

Todistuksen loppupäätelmä

Miten tämä osoittaa, että puussa on avoin oksa?

Induktio antaa meille menetelmän edetä puussa alaspäin pitäen induktio-oletus voimassa. Mikäli kulkemamme oksa on suljettu, se on äärellinen ja sillä esiintyy jokin kaava ja sen negaatio. Kun pääsemme oksan loppuun (ja induktio-oletus on voimassa) olemme osoittaneet, että $\mathcal{M}$ ja s toteuttavat nämä molemmat, mikä on mahdotonta. Oksa ei siis voi olla suljettu.