Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

31.3.2014

Aksioomat ja teoriat

Määritelmä

Olkoon L aakkosto. *(L-)teoria* T on joukko L-lauseita. Joukon T alkiot (lauseet) ovat teorian *aksioomat*. Jos $\mathcal{M}$ on L-malli, joka toteuttaa kaikki T:n lauseet, niin $\mathcal{M}$ on teorian T malli. Jos lause A voidaan päätellä T:n aksioomeista, A on T:n teoreema.

Esimerkki: verkot

Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto (E on kaksipaikkainen relaaitosymboli).

- L-malleja ovat kaikki mallit, joissa on tulkinta symbolille E (järjestysrelaatiot, verkot, tyhjä relaatio)
- verkkoja ovat ne verkkoteorian aakkoston mallit, jotka toteuttavat verkkoteorian aksioomat

Verkkoteorian aksioomat

G1 $\forall x \neg xEx$ (irrefleksiivisyys)

G2 $\forall x \forall y (xEy \to yEx)$ (symmetrisyys)

Järjestysaksioomat

J1 $\forall x\, \neg x < x$ (irrefleksiivisyys)

J2 $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ (transitiivisuus)

J3 $\forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$ (totaalisuus)

Identiteetti

Olemme antaneet identiteettisymbolille erityisen merkityksen

$$=^{\mathcal{M}} = \{(a, a) : a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})\}$$

Tämä johtuu siitä, että kaikessa hiljaisuudessa olemme olettaneet, että kaikki tutkimamme mallit toteuttavat *identiteettiaksioomat*

Identiteettiaksioomat

- I1 $\forall x\, x = x$
- I2 $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
- I3 $\forall x \forall y \forall z ((x = y \land y = z) \to x = z)$
- I4 $\forall x \forall y ((x = y \land P_n(x)) \to P_n(y))$
- I5 $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \land x' = y' \land R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$

Muita teorioita

- ryhmän aksioomat
- kunnan aksioomat
- vektoriavaruuden aksioomat

Nämä edellyttävät funktiosymboleita aakkostoon.

Muita teorioita

- ryhmän aksioomat
- kunnan aksioomat
- vektoriavaruuden aksioomat

Nämä edellyttävät funktiosymboleita aakkostoon.

Analyysin kurssilla esitetyt reaalilukujen aksioomat eivät ole esitettävissä ensimmäisen kertaluvun teoriana. (ongelmana täydellisyysaksiooma: kaikilla epätyhjillä ylhäältä rajoitetuilla osajoukoilla on supremum)

Vertaili

Määriteltävyys	**Aksioomat**
joukkoja, relaatioita annetun mallin sisällä	kokoelma malleja
yksi kaava	joukko lauseita

Päättely aksioomeilla

- tähän asti olemme päätelleet valideja kaavoja (päättely ilman oletuksia) tai loogisia seurauksia
- kun haluamme päätellä *teoreemoja*, otamme yksinkertaiseksi annetun teorian oletusjoukoksi
- sopimus: koska oletamme kaikkien mallien toteuttavan identiteettiaksioomat, ne voidaan aina käyttää päättelyssä (jos kaavoissa esiintyy identiteettiä)

Esimerkkejä

1. Päättele lause $\forall x P_0(x)$ lauseista $\forall x\, x = c$ ja $p_0(c)$.

Esimerkkejä

1. Päättele lause $\forall x P_0(x)$ lauseista $\forall x\, x = c$ ja $p_0(c)$.
2. Päättele lause $\exists x \forall y x = y \to \forall x' \forall y' x' = y'$.

Esimerkkejä

1. Päättele lause $\forall x P_0(x)$ lauseista $\forall x\, x = c$ ja $p_0(c)$.
2. Päättele lause $\exists x \forall y x = y \to \forall x' \forall y' x' = y'$.
3. Päättele lause $\forall x \forall y (x < y \to \neg y < x)$ järjestyksen aksioomeista.

Semanttiset puut

- konnektiivien säännöt sellaisenaan predikaattilogiikan kaavoille
- uudet säännöt kvanttoreille
- idea: propositiologiikassa etsittiin juuren toteuttavaa totuusjakaumaa; predikaattilogiikassa mallia

Semanttisten puiden kertaus: konjunktion säännöt

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \wedge B) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad \neg B \end{array}$$

Semanttisten puiden kertaus: disjunktion säännöt

$$\begin{array}{c} A \lor B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \qquad B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \lor B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Semanttisten puiden kertaus: negaation säännöt

$$
\begin{array}{c}
\neg\neg A \\
| \\
A
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A \\
| \\
\neg A \\
| \\
\times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg A \\
| \\
A \\
| \\
\times
\end{array}
$$

Semanttisten puiden kertaus: implikaation säännöt

$$A \to B$$

$$\neg A \quad B$$

$$\neg(A \to B)$$

$$A$$

$$\neg B$$

Semanttisten puiden kertaus: ekvivalenssin säännöt

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ B & & \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ \neg B & & B \end{array}$$

Universaalikvanttorin säännöt

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array}$$

- t termi, joka esiintyy samalla oksalla kuin $\forall x A$ ja on vapaa x:lle A:ssa (käytetään c_0, jos oksalla ei termejä)
- c_i *uusi* vakiosymboli

Eksistenssikvanttorin säännöt

$$\begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(c_i/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

- c_i *uusi* vakio
- t termi, joka esiintyy samalla oksalla kuin $\neg\exists xA$ ja on vapaa x:lle A:ssa

Kvanttorisääntöjen käyttö

Kun käytämme sääntöjä

$$\begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(c_i/x) \end{array}$$

ja tuomme uuden vakion kaavan "todistajaksi", kaava merkitään käsitellyksi (merkillä ✓).

Kahta muuta kaavaa ($\forall x A$ ja $\neg\exists x A$) *ei koskaan merkata* ja niitä sovelletaan uudestaan aina, kun oksalle ilmestyy uusi termi. Jos oksalla ei ole vakioita, kaavoja sovelletaan käyttäen terminä c_0.

Esimerkki

Etsi semanttisen puun avulla malli lauseelle

$$\exists x \forall y R(x, y) \wedge \neg \forall x R(x, x).$$