

Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

31.3.2014

Aksioomat ja teoriat

Määritelmä

Olkoon L aakkosto. $(L-)$ teoria T on joukko L -lauseita. Joukon T alkiot (lauseet) ovat teorian *aksioomat*. Jos \mathcal{M} on L -malli, joka toteuttaa kaikki T :n lauseet, niin \mathcal{M} on teorian T malli. Jos lause A voidaan päätellä T :n aksioomeista, A on T :n teoreema.

Esimerkki: verkot

Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto (E on kaksipaikkainen relaaitosymboli).

- L -malleja ovat kaikki mallit, joissa on tulkinta symbolille E (järjestysrelaatiot, verkot, tyhjä relaatio)
- verkkoja ovat ne verkkoteorian aakkoston mallit, jotka toteuttavat verkkoteorian aksioomat

Verkkoteorian aksioomat

G1 $\forall x \neg xEx$ (irrefleksiivisyys)

G2 $\forall x \forall y (xEy \rightarrow yEx)$ (symmetrisyys)

Järjestysaksiomat

J1 $\forall x \neg x < x$ (irrefleksiivisyys)

J2 $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ (transitiivisuus)

J3 $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$ (totaalisuus)

Identiteetti

Olemme antaneet identiteettisymbolille erityisen merkityksen

$$=^{\mathcal{M}} = \{(a, a) : a \in \text{dom}(\mathcal{M})\}$$

Tämä johtuu siitä, että kaikessa hiljaisuudessa olemme oletaneet, että kaikki tutkimamme mallit toteuttavat *identiteettiaksioomat*

Identiteettiaksioomat

$$I1 \quad \forall x \, x = x$$

$$I2 \quad \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

$$I3 \quad \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$$

$$I4 \quad \forall x \forall y ((x = y \wedge P_n(x)) \rightarrow P_n(y))$$

$$I5 \quad \forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \wedge x' = y' \wedge R_n(x, x')) \rightarrow R_n(y, y'))$$

Muita teorioita

- ryhmän aksioomat
- kunnan aksioomat
- vektoriavaruuden aksioomat

Nämä edellyttävät funktiosymboleita aakkostoon.

Muita teorioita

- ryhmän aksioomat
- kunnan aksioomat
- vektoriavaruuden aksioomat

Nämä edellyttävät funktiosymboleita aakkostoon.

Analyysin kurssilla esitetyt reaalilukujen aksioomat eivät ole esitettävissä ensimmäisen kertaluvun teoriana.
(ongelmana täydellisyysaksiooma: kaikilla epätyhjillä ylhäältä rajoitetuilla osajoukoilla on supremum)

Vertailu

Määriteltävyys

joukkoja, relaatioita annetun mallin sisällä
yksi kaava

Aksioomat

kokoelma malleja
joukko lauseita

Päättele aksioomeilla

- tähän asti olemme päätelleet valideja kaavoja (päättele ilman oletuksia) tai loogisia seurauksia
- kun haluamme päätellä *teoreemoja*, otamme yksinkertaiseksi annetun teorian oletusjoukoksi
- sopimus: koska oletamme kaikkien mallien toteuttavan identiteettiaksioomat, ne voidaan aina käyttää päätelyssä (jos kaavoissa esiintyy identiteettiä)

Esimerkkejä

- 1 Päättele lause $\forall x P_0(x)$ lauseista $\forall x x = c$ ja $p_0(c)$.

Esimerkkejä

- 1 Päättele lause $\forall x P_0(x)$ lauseista $\forall x x = c$ ja $p_0(c)$.
- 2 Päättele lause $\exists x \forall y x = y \rightarrow \forall x' \forall y' x' = y'$.

Esimerkkejä

- 1 Päättele lause $\forall x P_0(x)$ lauseista $\forall x x = c$ ja $p_0(c)$.
- 2 Päättele lause $\exists x \forall y x = y \rightarrow \forall x' \forall y' x' = y'$.
- 3 Päättele lause $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \neg y < x)$ järjestyksen aksioomeista.

Semanttiset puut

- konnektiivien säännöt sellaisenaan predikaattilogiikan kaavoille
- uudet säännöt kvanttoreille
- idea: propositiologiikassa etsittiin juuren toteuttavaa totuusjakaumaa; predikaattilogiikassa mallia

Semanttisten puiden kertaus: konjunktion säännöt

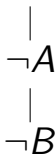
$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \wedge B) \\ \wedge \\ \neg A \quad \neg B \end{array}$$

Semanttisten puiden kertaus: disjunktion säännöt

$$A \vee B$$


A tree diagram representing the disjunction $A \vee B$. A horizontal line connects the letters A and B . From the midpoint of this line, a vertical line goes up to a point, from which two diagonal lines branch out downwards and outwards to the letters A and B .

$$\neg(A \vee B)$$


A tree diagram representing the negation of disjunction $\neg(A \vee B)$. A vertical line descends from the expression $\neg(A \vee B)$ to the letter \neg . From the letter \neg , another vertical line descends to the letter A . From the letter A , a vertical line descends to the letter \neg . From the letter \neg , a final vertical line descends to the letter B .

Semanttisten puiden kertaus: negaation säännöt

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$
$$\begin{array}{c} A \\ | \\ \neg A \\ | \\ \times \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \neg A \\ | \\ A \\ | \\ \times \end{array}$$

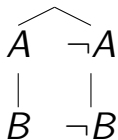
Semanttisten puiden kertaus: implikaation säännöt

$$A \rightarrow B$$
$$\begin{array}{c} \wedge \\ \neg A \quad B \end{array}$$

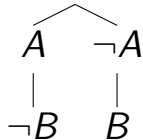
$$\neg(A \rightarrow B)$$
$$\begin{array}{c} | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Semanttisten puiden kertaus: ekvivalenssin säännöt

$$A \leftrightarrow B$$



$$\neg(A \leftrightarrow B)$$



Universaalikvanttorin säännöt

$$\begin{array}{c} \forall xA \\ | \\ A(t/x) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\forall xA \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array}$$

- t termi, joka esiintyy samalla oksalla kuin $\forall xA$ ja on vapaa x :lle A :ssa (käytetään c_0 , jos oksalla ei termejä)
- c_i uusi vakiosymboli

Eksistenssikvanttorin säännöt

$$\begin{array}{c} \exists xA \\ | \\ A(c_i/x) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg \exists xA \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

- c_i uusi vakio
- t termi, joka esiintyy samalla oksalla kuin $\neg \exists xA$ ja on vapaa x :lle A :ssa

Kvanttorisääntöjen käyttö

Kun käytämme sääntöjä

$$\begin{array}{ccc} \neg\forall xA & \text{tai} & \exists xA \\ | & & | \\ \neg A(c_i/x) & & A(c_i/x) \end{array}$$

ja tuomme uuden vakion kaavan “todistajaksi”, kaava merkitään käsitellyksi (merkillä \checkmark).

Kahta muuta kaavaa ($\forall xA$ ja $\neg\exists xA$) *ei koskaan merkata* ja niitä sovelletaan uudestaan aina, kun oksalle ilmestyy uusi termi. Jos oksalla ei ole vakioita, kaavoja sovelletaan käyttäen terminä c_0 .

Esimerkki

Etsi semanttisen puun avulla malli lauseelle

$$\exists x \forall y R(x, y) \wedge \neg \forall x R(x, x).$$