Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

17.3.2014

Vapaat ja sidotut muuttujat

Vertaile muuttujan x roolia kaavoissa

$$R(x, y) \qquad \text{ja} \qquad \exists x\, R(x, y)$$

Toisen toteutuminen riippuu tulkintafunktion x:lle antamasta arvosta, toisen ei.
Kaavassa $R(x, y)$ x on *vapaa*, kaavassa $\exists x\, R(x, y)$ *sidottu*.

Kvanttorin vaikutusalue

Määritelmä

Kvanttorin *vaikutusalue* kaavassa A on se A:n alikaava, jossa kyseinen kvanttori on pääoperaattori.

Esimerkki

Allaolevissa kaavoissa kvanttorin $\forall x$ vaikutusalue on alleviivattu:

$$\underline{\forall x(R_0(x,y) \to R_1(z,x))}$$
$$\underline{\forall x R_0(x,y)} \to R_1(z,x)$$

Vapaa / sidottu muuttujaesiintymä

Määritelmä

Muuttujan x esiintymä on *sidottu*, jos se esiintyy kvanttorin $\exists x$ tai $\forall x$ vaikutusalueella. Muuttujaesiintymä on *vapaa*, jos se ei ole sidottu. Kvanttori $\forall x$ tai $\exists x$ *sitoo* kaikki muuttujan x vapaat esiintymät vaikutusalueellaan.

Vapaa / sidottu muuttujaesiintymä

Esimerkki

Kaavassa $R(x, y)$ kaikki muuttujaesiintymät ovat vapaita.
Kaavasa $\exists x\ R(x, y)$, x on sidottu, y vapaa.
Kaavassa $\forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$, x:n ensimmäinen esiintymä on vapaa, muut sidottuja, y on sidottu.
Kaavassa $\forall x \forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$ kvanttori $\forall x$ sitoo x:n *vapaan* esiintymän kaavassa

$$\forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y)).$$

Se ei vaikuta myöhempiin esiintymiin, koska ne ovat jo sidottuja.

Lauseet

Määritelmä

Kaava, jossa ei esiinny vapaita muuttujia, on *lause* tai *suljettu kaava*.

Esimerkkejä lauseista:

- $\forall x\, x = x$
- $\forall x \forall y R(x, y)$
- $P(c)$

Lemma

Olkoon A on L-kaava ja $\mathcal{M}$ L-malli. Jos s ja s' ovat kaksi tulkintafunktiota, joilla $s(x_i) = s'(x_i)$ kaikilla muuttujilla x_i, jotka esiintyvät vapaina kaavassa A, niin $\mathcal{M} \models_s A$, jos ja vain jos $\mathcal{M} \models_{s'} A$.

Todistus harjoitustehtävänä.

Lauseiden riippumattomuus valitusta tulkintafunktiosta

Seuraus

Jos A on lause, niin $\mathcal{M} \models A$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \models_s A$ jollakin $\mathcal{M}$-tulkintafunktiolla s.

Määriteltävyys

- keskeinen logiikan käsite
- Mitä kaavojen avulla voi malleissa “nähdä”?
- kaavat määrittelevät joukkoja, relaatioita, alkioita,. . .

Määriteltävä osajoukko

Määritelmä

Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli. Universumin osajoukko $P \subseteq M$ on *määriteltävä osajoukko mallissa* $\mathcal{M}$, jos on olemassa L-kaava A, jossa vain x_0 esiintyy vapaana, ja jolla

$$P = \{a \in M : \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla tulkintafunktioilla } s, \text{ joilla } s(x_0) = a\}.$$

Tällöin A *määrittelee* P:n mallissa $\mathcal{M}$.

Kaava määrittelee osajoukon, joka koostuu kaikista kaavaa toteuttavista alkioista.

Huomautus

Määritelmässä ehdon

$$P = \{a \in M : \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla tulkintafunktioilla } s, \text{ joilla } s(x_0) = a\}.$$

tilalle olisimme voineet kirjoittaa

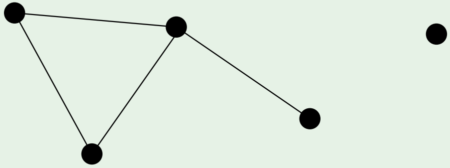
$$P = \{a \in M : \mathcal{M} \models_s A \text{ jollakin tulkintafunktioilla } s, \text{ jolla } s(x_0) = a\}.$$

Miksi?

Määriteltävä osajoukko

Esimerkki

Olkoon $L = \{E\}$ ja olkoon $\mathcal{G}$ seuraava verkko.



Minkä osajoukon kaava

$$\forall y \forall z((xEy \wedge xEz) \to y = z)$$

määrittelee verkossa $\mathcal{G}$?

Määriteltävistä osajoukoista

Annetussa mallissa määriteltävien osajoukkojen joukko on suljettu

- äärellisten yhdisteiden
- äärellisten leikkausten
- komplementoinnin

suhteen, eli muodostaa boolen algebran. Miksi?

Määriteltävä (kaksipaikkainen) relaatio

Määritelmä

Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli. Relaatio $R \subseteq M^2$ on *määriteltävä relaatio mallissa* $\mathcal{M}$, jos on olemassa L-kaava A, jossa vain x_0 ja x_1 esiintyvät vapaina, ja jolla

$$R = \{(a, b) \in M^2 : \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla tulkintafunktioilla } s, \\ \text{joilla } s(x_0) = a \text{ ja } s(x_1) = b\}.$$

Tällöin A *määrittelee* R:n mallissa $\mathcal{M}$.

Kaava määrittelee relaation, joka koostuu kaikista kaavaa toteuttavista alkiopareista.

Määriteltävä relaatio

Yleisemmin jos L on aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli, niin n-paikkainen relaatio $R \subseteq M^n$ on *määriteltävä mallissa* $\mathcal{M}$, jos on olemassa L-kaava A, jossa vain $x_0, \dots, x_{n-1}$ esiintyvät vapaina, ja jolla

$$R = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in M^n : \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla tulkinta-} \\ \text{funktioilla } s \text{, joilla } s(x_i) = a_i \\ \text{kaikilla } i < n\}.$$

Määriteltävä relaatio

Esimerkki

Olkoon $L = \{<\}$ ja $\mathcal{M} = (\{1,2,3,4,5\}, <)$, jossa $<$ on lukujen tavanomainen järjestys. Mikä kaava määrittelee rasteilla merkityn relaation alla olevassa kuvassa?

5	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$
4	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$	$\times$
3	$\bullet$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$
2	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	1	2	3	4	5