Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

10.3.2014

L-malli

Jos L on aakkosto, L-malli on jono

$$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}, \ldots, R_0^{\mathcal{M}}, R_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}}, \ldots)$$

missä

- M on mallin *universumi*,
- $P_i^{\mathcal{M}}$ on predikaattisymbolin P_i tulkinta mallissa $\mathcal{M}$,
- $R_i^{\mathcal{M}}$ on relaatiosymbolin R_i tulkinta mallissa $\mathcal{M}$,
- $c_i^{\mathcal{M}}$ on vakiosymbolin c_i tulkinta mallissa $\mathcal{M}$.

Esimerkki L-mallista

Esimerkki

Olkoon $L = \{P_0, R_0, c_0\}$. Tällöin L-mallissa on universumi, osajoukko, kaksipaikkainen relaatio ja vakio, esimerkiksi:

$$\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \mathbb{P}, <, 7)$$

L-atomikaavat

Aakkoston L atomikaavat muodostuvat seuraavasti:

1. Jos t ja u ovat L-termejä, niin $t = u$ on L-atomikaava.
2. Jos $R \in L$ on n–paikkainen relaatiosymboli ja $t_0, \ldots t_{n-1}$ ovat L-termejä, niin $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$ on L-atomikaava.

Esimerkkejä L-atomikaavoista

Esimerkki

Olkoon $L = \{P_0, R_0, c_0\}$. Tällöin L-atomikaavoja ovat esimerkiksi

- $x_0 = x_1$
- $c_0 = x_0$
- $P_0(x_8)$
- $P_0(c_0)$
- $R_0(x_0, x_1)$
- $R_0(c_0, c_0)$

L-kaavat

Määritelmä

Olkoon L aakkosto. L-kaavat ovat äärellisiä merkkijonoja, jotka on muodostettu seuraavien ehtojen mukaan:

1. L-atomikaavat ovat L-kaavoja.
2. Jos A on L-kaava, niin $\neg A$ on L-kaava.
3. Jos A ja B ovat L-kaavoja, niin

   $$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \to B)\ (A \leftrightarrow B)$$

   ovat L-kaavoja.
4. Jos A on L-kaava ja x_i on muuttuja, niin $\forall x_i A$ ja $\exists x_i A$ ovat L-kaavoja.

Tulkintafunktiot

Määritelmä

Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli. $\mathcal{M}$-tulkintafunktio on funktio

$$s : \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to \mathrm{dom}(\mathcal{M}).$$

Siis tulkintafunktio antaa jokaiselle muuttujalle arvon: alkion mallin universumista.

L-termi

Tässä vaiheessa kurssia L-termejä ovat

- muuttujat
- aakkoston L vakiosymbolit

Termin arvo

Olkoon L aakkosto ilman funktiosymboleja, $\mathcal{M}$ L-malli, s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio ja t L-termi. Termin t arvo tulkintafunktiolla s, $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$, on

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = \begin{cases} s(x_i) & \text{jos } t = x_i \\ c_i^{\mathcal{M}} & \text{jos } t = c_i \end{cases}$$

Atomikaavan toteutuminen

Määritelmä

Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio.

1. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $t_1 = t_2$ mallissa $\mathcal{M}$, jos
$$t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle.$$
2. Jos R on n-paikkainen relaatiosymboli, tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $R(t_1, \ldots, t_n)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos
$$(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \in R^{\mathcal{M}}.$$

Atomikaavan toteutuminen, esimerkki

Esimerkki

Olkoon $L = \{P_0\}$ ja $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \mathbb{P})$. Tällöin $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s toteuttaa kaavan

$$P_0(x_i)$$

mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos $s(x_i) \in \mathbb{P}$.

Konnektiivit ja kaavan toteutuminen

Määritelmä

Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio.

1. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\neg A$ mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos s ei toteuta kaavaa A mallissa $\mathcal{M}$.
2. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \wedge B)$ mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos se toteuttaa sekä kaavan A että kaavan B mallissa $\mathcal{M}$.
3. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \vee B)$ mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos se toteuttaa ainakin toisen kaavoista A ja B mallissa $\mathcal{M}$.

Konnektiivit ja kaavan toteutuminen, jatk.

Määritelmä

4. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \rightarrow B)$ mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos se ei toteuta kaavaa A tai toteuttaa kaavan B mallissa $\mathcal{M}$.
5. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \leftrightarrow B)$ mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos se joko toteuttaa sekä A:n että B:n tai ei toteuta kumpaakaan mallissa $\mathcal{M}$.

Tulkintafunktioiden muuttaminen

Määritelmä

Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Tulkintafunktio $s(a/x_i)$ on tulkintafunktio, jolla

$$s(a/x_i)(x_j) = \begin{cases} a & \text{jos } j = i \\ s(x_j) & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kvanttorit ja kaavan toteutuminen

Määritelmä

Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Olkoon $M = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$.

1. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\forall x_i A$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos kaikilla $a \in M$ tulkintafunktio $s(a/x_i)$ toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$.
2. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\exists x_i A$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos on olemassa $a \in M$, jolla tulkintafunktio $s(a/x_i)$ toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$.