# Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

10.2.2014

# Esimerkki

## Esimerkki

Onko propositiolause
$(p_0 \wedge ((p_0 \to p_1) \wedge ((p_1 \to p_2) \wedge ((p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3))))$
toteutuva?

**Ratkaisu:** Jotta totuusjakauma $v$ voisi toteuttaa lauseen, on sen toteutettava konjunktit

$$v(p_0) = v(p_0 \to p_1) = v(p_1 \to p_2) = v(p_2 \to p_3) = v(\neg p_3)$$

Koska $v(p_0) = 1$ ja $v(p_0 \to p_1) = 1$, on oltava $v(p_1) = 1$. Samoin näemme, että $v(p_2) = 1$ ja edelleen $v(p_3) = 1$. Samalla on oltava $v(\neg p_3) = 1$, mikä on mahdotonta. Lause siis ei ole toteutuva.

# Edellinen semanttisena puuna

$$p_0 \wedge ((p_0 \to p_1) \wedge ((p_1 \to p_2) \wedge ((p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3))) \checkmark$$

$$p_0$$

$$(p_0 \to p_1) \wedge ((p_1 \to p_2) \wedge ((p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3)) \checkmark$$

$$p_0 \to p_1 \checkmark$$

$$(p_1 \to p_2) \wedge ((p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3) \checkmark$$

$$p_1 \to p_2 \checkmark$$

$$(p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3 \checkmark$$

$$p_2 \to p_3 \checkmark$$

$$\neg p_3$$

$$\neg p_0 \qquad p_1$$

$$\times \qquad \neg p_1 \qquad p_2$$

$$\times \qquad \neg p_2 \qquad p_3$$

$$\times \qquad \times$$

# Semanttinen puu

- menetelmä tutkia, milloin lause voi toteutua
- säännöt: pitääkö jommankumman, molempien vai ei kummankaan välittömistä alikaavoista toteutua, jotta lause toteutuisi
- jos oksassa on ristiriita, se on suljettu; merkitään X:llä
- avoimesta oksasta saa totuusjakauman, joka toteuttaa kaikki oksan lauseet

# Semanttinen puu, jatk.

- lauseet merkataan käsitellyiksi, kun niihin sovellettu sopivaa sääntöä
- käsittelyjärjestys on vapaa
- säännön soveltaminen jatkaa *kaikkia lauseen kautta kulkevia avoimia oksia*
- puu on valmis, kun kaikki paitsi literaalit (eli propositiosymbolit ja niiden negaatiot) on merkattu

# Konjunktion säännöt

$$
\begin{array}{c}
A \wedge B \\
| \\
A \\
| \\
B
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg(A \wedge B) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg A \qquad \neg B
\end{array}
$$

# Disjunktion säännöt

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ & / \quad \backslash & \\ A & & B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

# Negaation säännöt

$$
\begin{array}{c}
\neg\neg A \\
| \\
A
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A \\
| \\
\neg A \\
| \\
\times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg A \\
| \\
A \\
| \\
\times
\end{array}
$$

# Implikaation säännöt

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg A \qquad B \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

# Ekvivalenssin säännöt

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ \diagup & & \diagdown \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ B & & \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ \diagup & & \diagdown \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ \neg B & & B \end{array}$$

# Semanttisen todistuksen idea

- Jos lause on toteutuva, sille voidaan puun avulla löytää totuusjakauma.
- Jos puu on suljettu (sen jokainen oksa on suljettu), lause on ristiriitainen.
- Jos $\neg A$ on ristiriitainen, $A$ on tautologia.

# Semanttinen todistus

Semanttisessa todistuksessa piirretään semanttinen puu lauseelle $\neg A$. Jos puun kaikki oksat sulkeutuvat, $A$ on tautologia.

## Lause

1. *Jos propositiolause $A$ on toteutuva, sen semanttiseen puuhun jää ainakin yksi avoin oksa.*
2. *Jos propositiolause $A$ ei ole toteutuva, sen semanttisen puun jokainen oksa sulkeutuu.*

Todistus sivuutetaan, ks. esim. Salminen-Väänänen.

## Seuraus

*Propositiolauseella on semanttinen todistus, jos ja vain jos se on tautologia.*

# Semanttisista puista

Mitä tiedetään propositiolauseesta $A$, jos

1. sen semanttisessa puussa on ainakin yksi avoin lopullinen oksa?
2. sen semanttisen puun kaikki oksat ovat avoimia ja lopullisia?
3. sen semanttisesssa puussa on ainakin yksi suljettu oksa?
4. sen semanttinen puu on suljettu?

Pohdintatehtävä: Jos propositiolause $A$ sisältää kaksi propositiosymbolia ja sen lopulliseen puuhun jää neljä avointa oksaa, mitä tiedetään $A$:sta?