

Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

10.2.2014

Esimerkki

Esimerkki

Onko propositiolause

$(p_0 \wedge ((p_0 \rightarrow p_1) \wedge ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge ((p_2 \rightarrow p_3) \wedge \neg p_3))))$
toteutuva?

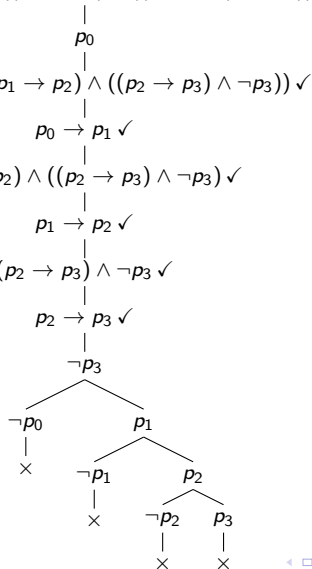
Ratkaisu: Jotta totuusjakauma v voisi toteuttaa lauseen, on sen toteutettava konjunktit

$$v(p_0) = v(p_0 \rightarrow p_1) = v(p_1 \rightarrow p_2) = v(p_2 \rightarrow p_3) = v(\neg p_3)$$

Koska $v(p_0) = 1$ ja $v(p_0 \rightarrow p_1) = 1$, on oltava $v(p_1) = 1$. Samoin näemme, että $v(p_2) = 1$ ja edelleen $v(p_3) = 1$. Samalla on oltava $v(\neg p_3) = 1$, mikä on mahdotonta. Lause siis ei ole toteutuva.

Edellinen semanttisena puuna

$$p_0 \wedge ((p_0 \rightarrow p_1) \wedge ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge ((p_2 \rightarrow p_3) \wedge \neg p_3))) \checkmark$$



Semanttinen puu

- menetelmä tutkia, milloin lause voi toteutua
- säännöt: pitääkö jommankumman, molempien vai ei kummankaan välittömistä alikaavoista toteutua, jotta lause toteutuisi
- jos oksassa on ristiriita, se on suljettu; merkitään X:llä
- avoimesta oksasta saa totuusjakauman, joka toteuttaa kaikki oksan lauseet

Semanttinen puu, jatk.


- lauseet merkataan käsitellyiksi, kun niihin sovellettu sopivaa sääntöä
- käsittelyjärjestys on vapaa
- säännön soveltaminen jatkaa *kaikkia lauseen kautta kulkevia avoimia oksia*
- puu on valmis, kun kaikki paitsi literaalit (eli propositiosymbolit ja niiden negaatiot) on merkattu



Konjunktio säännöt

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \wedge B) \\ \wedge \\ \neg A \quad \neg B \end{array}$$

Disjunktio säännöt

$$A \vee B$$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ A \quad B \end{array}$$

$$\neg(A \vee B)$$

$$\neg A$$

$$\neg B$$

Negaation säännöt

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ \neg A \\ | \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg A \\ | \\ A \\ | \\ \times \end{array}$$

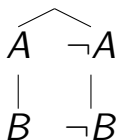
Implikaation säännöt

$$A \rightarrow B$$
$$\neg A \quad B$$

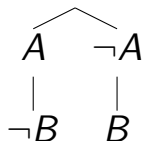
$$\neg(A \rightarrow B)$$
$$A$$
$$\neg B$$

Ekvivalenssin säännöt

$$A \leftrightarrow B$$



$$\neg(A \leftrightarrow B)$$



Semanttisen todistuksen idea

- Jos lause on toteutuva, sille voidaan puun avulla löytää totuusjakauma.
- Jos puu on suljettu (sen jokainen oksa on suljettu), lause on ristiriitainen.
- Jos $\neg A$ on ristiriitainen, A on tautologia.

Semanttinen todistus

Semanttisessa todistuksessa piirretään semanttinen puu lauseelle $\neg A$. Jos puun kaikki oksat sulkeutuvat, A on tautologia.

Lause

- 1 *Jos propositiolause A on toteutuva, sen semanttiseen puuhun jää ainakin yksi avoin oksa.*
- 2 *Jos propositiolause A ei ole toteutuva, sen semanttisen puun jokainen oksa sulkeutuu.*

Todistus sivuutetaan, ks. esim. Salminen-Väänänen.

Seuraus

Propositiolauseella on semanttinen todistus, jos ja vain jos se on tautologia.

Semanttisista puista

Mitä tiedetään propositiolauseesta A , jos

- 1 sen semanttisessa puussa on ainakin yksi avoin lopullinen oksa?
- 2 sen semanttisen puun kaikki oksat ovat avoimia ja lopullisia?
- 3 sen semanttisessa puussa on ainakin yksi suljettu oksa?
- 4 sen semanttinen puu on suljettu?

Pohdintatehtävä: Jos propositiolause A sisältää kaksi propositiosymbolia ja sen lopulliseen puuhun jää neljä avointa oksaa, mitä tiedetään A :sta?