Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kevät 2014

Luento 5 / 13

Jukka Kohonen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

”Todennäköisyys”-käsitteestä

Erilaisia lähestymistapoja:

- **Formaali / aksiomaattinen:** Esitetään matemaattisia määritelmiä, tutkitaan, mitä niistä seuraa (lasku- ja päättelysääntöjä).

- **Reaalimaailman mallintaminen:** Koetetaan päätellä, miten esim. fysikaalisesti
  - ilmaan heitetty nasta liikkuu ja asettuu pöydälle, tai
  - rulettikuula liikkuu jonkin matkan kunnes pysähtyy.

  Mallintaminen voi olla vaikeaa joten tehdään yksinkertaistuksia.

- **Kokeellinen:** Suoritetaan jokin määrä samankaltaisia kokeita, tutkitaan miten usein tietyntyyppinen tapahtuma toteutui.

Lähestymistavat eivät ole toisistaan irrallisia, vaan tukevat toisiaan. Voimme esim. muodostaa fysikaalisen mallin ja laskea sen perusteella jonkin todennäköisyyden, sitten **tutkia** kokeellisesti **vaikuttaako** malli pätevältä.

Tn-aksioomista

Todennäköisyysavaruuteen kuuluu kolme osaa.

Ω perusjoukko. Tässä luetellaan yksittäiset vaihtoehdot (alkeistapaukset), joista täsmälleen yksi toteutuu.

F tapahtumien kokoelma. Tässä luetellaan, mille perusjoukon osajoukoille aiomme yleensäkään määritellä todennäköisyyksiä.

P todennäköisyys. Tämä on funktio tapahtumakokoelmalta reaaliluvuille, ts. se liittää kuhunkin tapahtumaan jonkin luvun.

Miten määritelmää tai lausetta luetaan? ”Mitä siinä sanotaan”?

1.2 Todennäköisyyden aksioomat

Tuominen s. 15

Tarkoituksena on nyt esittää matemaattinen malli, *todennäköisyysavaruus*, joka on riittävän yleinen soveltuakseen erilaisten satunnaisilmiöiden matemaattisen käsittelyn perustaksi.

Satunnaiskokeen kuvailussa on periaatteessa aina ensin päätettävä, mitkä ovat kokeen tulosmahdollisuudet, *alkeistapaukset*. Nämä muodostavat *perusjoukon* Ω.

Toiseksi kiinnitämme kokoelman $\mathcal{F}$ Ω:n osajoukkoja, joita kutsumme *tapahtumiksi*. Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ sattuminen tarkoittaa sitä, että kokeen tulos ω on joukossa A, ts. $\omega \in A$. Edellisen kappaleen esimerkeissä oli luonnollista valita $\mathcal{F}$:ksi Ω:n kaikkien osajoukkojen kokoelma $\mathcal{P}(\Omega)$. Tämä ei ole yleensä mahdollista; siksi on erikseen asetettava seuraavat ehdot, jotka takaavat kaikkien numeroituvien joukko-operaatioiden luvallisuuden tapahtumien kesken.

Määritelmä 1.2.1 Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon Ω osajoukkoja on *σ-algebra*, jos

$$(\sigma A_1) \qquad \Omega \in \mathcal{F}$$

$$(\sigma A_2) \qquad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$(\sigma A_3) \qquad A_i \in \mathcal{F} \ (i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

- Lue huolellisesti pala kerrallaan. Mitkä ovat määritelmässä uudet käsitteet ?
- Tee vaikka suttupaperille itsellesi **esimerkkitapaus** ja tutki sitä.
- Mitä **seurauksia** määritelmästä on? Onko määritelmän jälkeen lauseita?
- **Jos et tiedä** mitä joku merkintä tarkoittaa, **ota selvää**!

Tapahtuman A *todennäköisyys*, $P(A)$, on reaaliluku, jonka on oltava yksikäsitteisesti määrätty, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on annettu. Toisin sanottuna P on kuvaus (eli funktio) $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Tuominen s. 15-17

Määritelmä 1.2.2 Kuvaus $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on *todennäköisyys*, jos

(TN$_1$) $P(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$,

(TN$_2$) $P(\Omega) = 1$,

(TN$_3$) (täysadditiivisuus)

Jos $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ja

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \text{ niin}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on *todennäköisyysavaruus*, jos Ω on ei-tyhjä joukko, $\mathcal{F}$ on σ-algebra ja $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys.

Tietokone ja satunnaisluvut

- Tietokone toimii (yleensä) deterministisesti, ts. suorittaa tiettyä ohjelmaa sääntöjen mukaisesti

- Tila ennen ohjelma-askelta *x: 3* *y: 10*
- Suoritetaan ohjelma-askel **`y = 2*x + 1;`**
- Tila ohjelma-askelen jälkeen *x: 3* *y: 7*

- Miten ohjelmallisesti tuotetaan ”satunnaislukuja”, ts. jono lukuja joiden arvoja on vaikea ennustaa? Esim. http://lamar.colostate.edu/~grad511/lcg.pdf