Johdatus todennäköisyyslaskentaan kevät 2014

Luento 3 / 12

Jukka Kohonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Helsingin yliopisto

VIELÄ KOMBINATORIIKKAA

Nostetaan 2 korttia, P(ässäpari)?

Tapa 1, variaatiot

- Perusjoukko: 2 kortin jonot, $(52)_2$ = 2652 kpl.
- Suotuisat tapaukset: 2 ässän jonot, $(4)_2$ = 12 kpl.
- P(ässäpari) = 12 / 2652 = **1/221**

Tapa 2, kombinaatiot

- Perusjoukko: 2 kortin joukot, (52 yli 2) = 1326 kpl.
- Suotuisat tapaukset: 2 ässän joukot. Montako niitä on? Ässiä on pakassa neljä (♠♣♥♦). Niistä voidaan kaksi valita (4 yli 2) = 6 eri tavalla: {♠♣}, {♠♥}, {♠♦}, {♣♥}, {♣♦}, {♥♦}.
- P(ässäpari) = 6 / 1326 = **1/221**

5 kortin käsi, P(samaa maata) ?

Laskutapa 1: Alkeistapauksina variaatiot (5 kortin **osajonot**, sama kortti ei toistu).

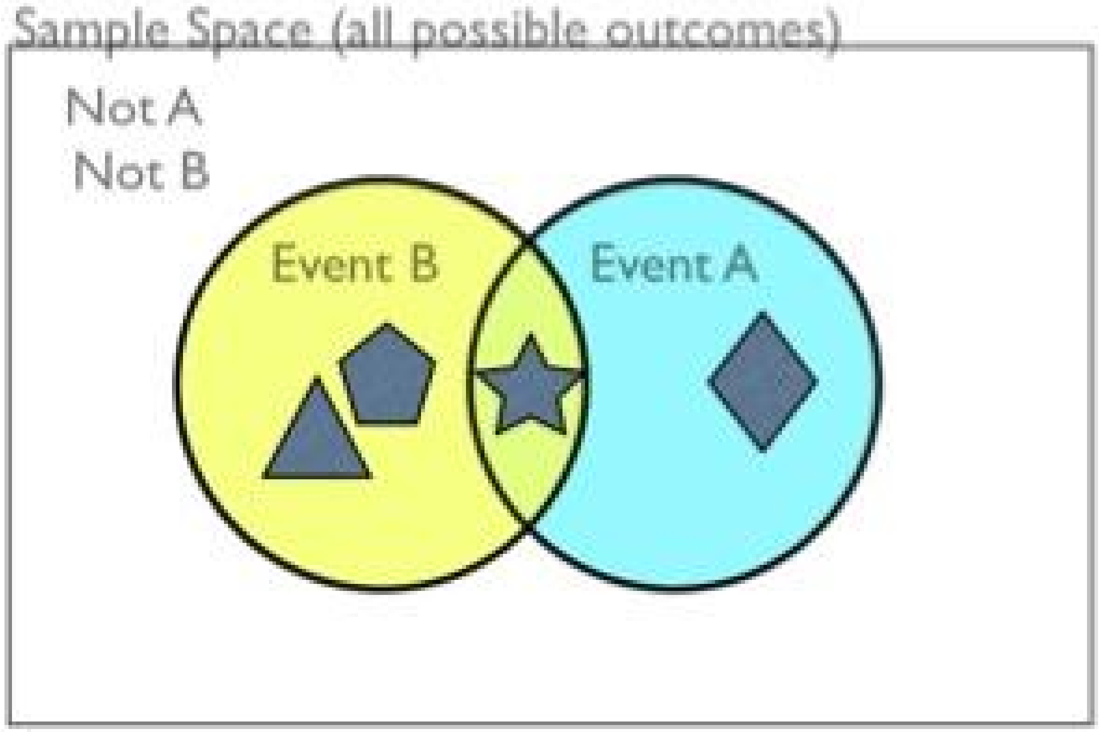
- Alkeistapauksia on $(52)_5$ = **311 875 200** kpl (♥Q, ♣2, ♠7, ♥2, ♥K)
- Suotuisat tuloperiaatteella
  - 1. kortti on mikä tahansa 52 vaihtoehtoa
  - 2. kortti on samaa maata kuin 1. 12 vaihtoehtoa
  - 3. kortti on samaa maata kuin 1. 11 vaihtoehtoa
  - 4. kortti on samaa maata kuin 1. 10 vaihtoehtoa
  - 5. kortti on samaa maata kuin 1. 9 vaihtoehtoa

  Suotuisia käsiä on 52 · 12 · 11 · 10 · 9 = **617 760** kpl
- Todennäköisyys on 617 760 / 311 875 200 **≈ 0.00198**

Laskutapa 2: Alkeistapauksina kombinaatiot (5 kortin **osajoukot**) {♥Q, ♣2, ♠7, ♥2, ♥K}

- Alkeistapauksia on (52 yli 5) = **2 598 960** kpl
- Suotuisat tuloperiaatteella
  - Maa on jokin neljästä: 4 vaihtoehtoa
  - Viisi korttia kyseisestä maasta: (13 yli 5) = 1287 vaihtoehtoa

  Suotuisia käsiä on 4 · 1287 = **5148** kpl
- Todennäköisyys on 5148 / 2 598 960 **≈ 0.00198**



YLEINEN TODENNÄKÖISYYS

Äärellinen todennäköisyysavaruus

(Tuominen s.21—22)

- Kuten edellä, perusjoukko = alkeistapausten joukko luettelee kaikki mahdolliset vaihtoehdot: **tasan yksi niistä toteutuu.**
- Alkeistapauksia $\boldsymbol{\omega_i}$ (missä i=1,...,n) ei pidetä yhtä todennäköisinä, vaan jokaiseen voidaan liittää **jokin todennäköisyys** $\mathbf{P(\{\omega_i\}) = p_i}$
- Olennainen ominaisuus **todennäköisyyden additiivisuus**: tapahtuman (= joukko alkeistapauksia) todennäköisyys = summa sen alkeistapausten todennäköisyyksistä.
- Alkeistapausten lukumäärien laskemisella ei nyt ole paljonkaan merkitystä. Olennaista on yhteenlasku.

- Esim. nastanheitto (2 alkeistapausta, esim. P(alas)=0.7, P(ylös)=0.3)
- Esim. syntyvän lapsen sukupuoli (2 alkeistapausta esim. P(poika)=0.51)
- Esim. epäsäännöllinen noppa (monta alkeistapausta eri todennäköisyyksin)

Yleinen tn-avaruus (Tuominen s. 15—20)

- Alkeistapauksia voi olla ääretönkin määrä.
  - Esim. lämpötilan ennuste, alkeistapaukset reaalilukuja
- Laskenta ei enää välttämättä onnistu yhteenlaskulla alkeistapauksista.

- Ratkaisu: Valitaan F , joka on **kokoelma alkeistapausten joukkoja**. Näille jokaiselle määritellään todennäköisyys, ja pidetään voimassa perusominaisuudet kuten **additiivisuus** **(= erillisen yhdisteen tn saadaan yhteenlaskulla)**

- Kokoelman pitää olla sellainen, että pystytään puhumaan leikkaus-, komplementti- ja unionitapahtumien todennäköisyyksistä (aksioomat sivulla 15)

Yleinen tn-avaruus jatk.

- Alkeistapauksille ei välttämättä määritellä ollenkaan todennäköisyyttä!
- Esim. perusjoukkona lämpötilat, mutta **F = {Ø, A, B, C, A∪B, A∪C, B∪C, R},** missä
  - A = ”pakkasta” on reaalilukuväli (-ääretön, 0)
  - B = ”hellettä” on reaalilukuväli (25, ääretön)
  - C = ”siltä väliltä” on reaalilukuväli [0, 25]
- Määritellään nyt esim.
  P(A) = 0.8
  P(B) = 0.2
  P(C) = 0
- Olemme määritelleet erään todennäköisyysavaruuden!
  - Emme ottaneet ollenkaan kantaa siihen, mikä on tapahtuman ”yli 10 astetta pakkasta” todennäköisyys. Tämä tapahtuma ei ole kokoelman **F** jäsen
  - Mutta additiivisuuden, ja A:n ja B:n erillisyyden vuoksi tulimme samalla määritelleeksi: P(A ∪ B) = P(A) + P(B) = 0.8 + 0.2 = 1
- F on siis **se kokoelma joukkoja (tapahtumia), joille määritellään tn**

Erilaisia tn-avaruuksia

Todennäköisyysavaruus	Yhden alkeistapauksen tn $P(\{\omega_i\})$	Tapahtuman tn P(A)
Symmetrinen äärellinen	$1 / n(\Omega)$ Kaikilla sama!	$n(A) / n(\Omega)$ Suotuisten lukumääräosuus = summa suotuisten alkeistapauksien tn:istä (Miksi pätee yhtäsuuruus?)
Epäsymmetrinen äärellinen	p_i Voi olla kaikilla eri!	Summa suotuisten alkeistapauksien tn:stä Ei voi laskea lukumääräosuudesta.
Yleinen (voi olla ääretön)		Mielivaltainen funktio, kunhan tn-aksioomat toteutuvat. Yleensä ei tarkastella alkeistapauksia, vaan tapahtumia.

Peruslaskusäännöt   Tuominen s. 18

- Nämä säännöt pätevät kaikissa tn-avaruuksissa
  - Symmetrinen tai epäsymmetrinen
  - Äärellinen tai ääretön
- Mielikuva, jossa perusjoukon ”mitta” tai ”massa” jakautuu additiivisiin osiin, yleensä auttaa ymmärtämään kaikki säännöt
  - Mittateoreettinen näkökulma: Todennäköisyyslaskenta on mittateoriaa, jossa koko joukon mitta = 1
- Olennaista ymmärtää tapahtumien joukko-opillinen tulkinta:
  - Erilliset eli poissulkevat tapahtumat (tapahtumilla ei yhteisiä alkeistapauksia)
  - Toinen tapahtuma sisältyy toiseen
  - Tapahtumien unioni, leikkaus ja komplementti
  - Jne.
- Käydään lauseen 1.3.2 tapaukset läpi kuvan kanssa.