Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kevät 2014

Luento 1 / 13

Jukka Kohonen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

I Kurssin perusasiat

Kurssin tavoitteet

- ymmärtää **todennäköisyyden käsite**
- ymmärtää tn-laskennan muut **peruskäsitteet** (satunnaismuuttuja, jakauma, odotusarvo...)
- osata **operoida** niillä (laskutoimitukset ja päättely)
- tuntea tärkeimmät yleisesti käytetyt **jakaumat** (tasajakauma, normaali jne.)

Kurssin perustiedot

Oppikirja Pekka Tuominen: **Todennäköisyyslaskenta I**

Tehtävät 6 tai 7 viikkoa.
Palauta ratkaisusi laatikkoon keskiviikkoisin.
Ei voi palauttaa sähköisesti.

Ohjaus Ohjausta on tarjolla kaikkina arkipäivinä,
ks. linkki kurssisivulla.

Luennot johdantoluennon jälkeen: 6 viikkoa
to 10—12 ja pe 12—13 salissa A111

Kotisivu **http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=112441823**

Kurssikoe ma 10.3. kello 16–18

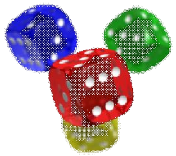
Harjoitustehtävistä

- Kurssin laajuus on 5 opintopistettä
  ≈ 135 tuntia opiskelijan työtä
  ≈ 6 viikkoa à 22 tuntia

- Luentoja on vain 3 tuntia viikossa. Ei pidä kuvitella, että kurssin koko asiasisältö käsitellään luennoilla!

- Pääosa työstä on kirjan ja muun materiaalin lukemista, **tehtävien tekemistä** (ohjauksen kanssa tai ilman, valinta on vapaa), malliratkaisujen lukemista ja vertaamista omiin ratkaisuihin.

II Todennäköisyyden käsite



Mitä on todennäköisyys?

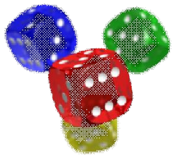
Logiikassa **väitteellä** eli propositiolla on totuusarvo, joko tosi (1) tai epätosi (0). Väite voi koskea esim. jonkin muuttujan arvoa (”X > 5”).

Todennäköisyys on **arvio** jonkin **väitteen** totuusarvosta.

Puhutaan myös ”uskomuksen asteesta”.

- Arviota tarvitaan, kun tarkkaa tietoa ei ole. Tietomme on vajavaista, osittaista, epävarmaa, epätarkkaa.
- Arvio esitetään lukuna välillä [0, 1].

P(”Ville-setä tulee huomenna kylään”) = **0,8**
P(”Seuraavan kolikonheiton tulos on kruuna”) = **0,5**



Mitä on todennäköisyys?

Todennäköisyys on **arvio** jonkin **väitteen** totuusarvosta.

P(”Ville-setä tulee huomenna kylään”) = **0,8**
P(”Seuraavan kolikonheiton tulos on kruuna”) = **0,5**

Ylläoleva herättää (toivottavasti) paljon kysymyksiä.

1. Miten sellaisen ”arvion” voi tehdä? ***Vedetään hatusta (Stetson)?***
2. Mitä ”arvio” 0,8 oikein tarkoittaa? ***Ville tulee 80-prosenttisesti kylään?***
3. Voiko sanoa, onko ”arvio” oikea? ***Ville ei tullut. Oliko 0,8 väärä?***
4. Mihin ”arviota” oikein voi käyttää? ***Ostetaanko viideskin pihvi?***
5. Voiko ”arvio” muuttua? ***Kuulin, että Villellä on flunssa***

Tällä kurssilla opitaan (toivottavasti) joitakin vastauksia.

1) Miten arvion voi tehdä?

P("Ville-setä tulee huomenna kylään") = **0,8**
P("Seuraavan kolikonheiton tulos on kruuna") = **0,5**

Vrt. jonkin muun seikan (talon korkeus, ihmisen paino) arvioiminen. Menetelmiä on erilaisia – tarkempia ja vähemmän tarkkoja.

- **Subjektiivinen** arvio (asiantuntija-arvio).
- **Symmetria**: kohdellaan jokaista <u>mahdollista</u> vaihtoehtoa samanveroisesti – joko siksi, ettei muutakaan osata, tai koska on hyvät syyt pitää samanarvoisina, esim. fysikaalinen symmetria.
- **Laskutoimitus** olemassaolevista tiedoista ja arvioista, aiemmista havainnoista. Todennäköisyys<u>laskenta</u> on olennaisesti juuri tätä.
- **Kokeilemalla** monta kertaa ja havaitsemalla frekvenssi – <u>jos</u> tapahtuma on <u>toistettavissa</u> olennaisesti samanlaisena.

2) Mitä arvio tarkoittaa?

P("Ville-setä tulee huomenna kylään") = **0,8**

Ei: "80 prosenttia Ville-sedästä tulee kylään"

Kyllä: Uskomuksen aste: mitä varmempana pidämme asiaa, sitä suurempi on numeerinen arvio.

- **Operatiivinen tulkinta:** 80 % on selvästi yli puolet

  → arvion tehnyt henkilö pitää selvästi **todennäköisempänä**, että väite on **tosi** kuin että se on **epätosi**

  → arvio vaikuttaa henkilön **valintoihin** (esim. ostetaanko Villellekin pihvi; otetaanko sateenvarjo mukaan; ostetaanko vakuutus).

- **Frekvenssitulkinta:** Jos vastaavia tilanteita **toistuu monta kertaa**,

  → arvioimme, että noin 80 %:ssa väite (tapahtuma) toteutuu.

  → Ongelma: **voiko** vastaava tilanne toistua? Miten paljon saa muuttua, että vielä sanomme tilannetta vastaavaksi?

  (Nopanheitto sateella)

3) Onko arvio oikea tai väärä?

Kalle sanoi:	P(”Ville kylään”) = **0**
Jaana sanoi:	P(”Ville kylään”) = **0.5**
Jussi sanoi:	P(”Ville kylään”) = **0.9**
Liisa sanoi:	P(”Ville kylään”) = **1**

Koittaa lauantai
ja Ville ilmaantuu.
Ketkä olivat oikeassa,
ketkä väärässä?

”Tieto on hyvin perusteltu tosi uskomus.” (Platon)

Todennäköisyysarvioita voi pitää hyvinä tai huonoina:

- **Perustelujen** mukaan: Ovatko järkeviä, konsistentteja muun tietämyksen kanssa?
- **Osuvuuden** mukaan: Kuinka lähelle totuutta osuttiin?
  - Jälkiviisauden ongelma: Arviota tehtäessä ei ollut käytettävissä sitä tietoa, mikä myöhemmin on. Lottovoittajan veikkausrivi osui täsmälleen oikeaan, mutta johtuiko se tiedosta?

Havaintofrekvenssi

- Kokeilemme kolikonheittoa monta kertaa. Tuleeko tasan puolet kruunia?

Toistettu kolikonheitto

10 heittoa:	6 klaavaa,	4 kruunaa (40.000 %)	erotus	-2
20 heittoa:	10 klaavaa,	10 kruunaa (50.000 %)	erotus	0
30 heittoa:	17 klaavaa,	13 kruunaa (43.333 %)	erotus	-4
...				
100 heittoa:	50 klaavaa,	50 kruunaa (50.000 %)	erotus	0
200 heittoa:	102 klaavaa,	98 kruunaa (49.000 %)	erotus	-4
...				
1000 heittoa:	506 klaavaa,	494 kruunaa (49.400 %)	erotus	-12
...				
10000 heittoa:	5043 klaavaa,	4957 kruunaa (49.570 %)	erotus	-86
...				
100000 heittoa:	50078 klaavaa,	49922 kruunaa (49.922 %)	erotus	-156
...				
1000000 heittoa:	500389 klaavaa,	499611 kruunaa (49.961 %)	erotus	-778

4) Mihin arviota voi käyttää?

Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa.

Esim. Haluat aurinkolomalle. Kohteessa A sateen tn on 0.3 mutta kohteessa B se on 0.1. Kumman **valitset**? Mitä valinnasta voi seurata?

Esim. Insinöörin mukaan tn, että lentokoneen ohjausjärjestelmän hydrauliletku hajoaa lennon aikana on 1/1000. Jos letku hajoaa, konetta ei voi ohjata. **Kannattaako** letku suunnitella vahvemmaksi tai laittaa varajärjestelmä?

5) Voiko arvio muuttua?

- Tn-arvio riippuu aina siitä, mitä kaikkea tilanteesta tiedetään.
- Tiedon lisääntyessä todennäköisyyskin voi muuttua!
  - **Sääennuste** muuttuu, kun saadaan havaintoja ja tehdään lisää laskentaa
  - **Villen vierailun** tn muuttuu, kun kuulemme hänen olevan flunssassa
  - **Nopanheiton** tn muuttuu, kun huomaamme, että noppa on painotettu, tai kun heitto on tehty ja näemme osan nopasta

Yhteiset laskusäännöt

- Vaikka todennäköisyys on monitahoinen käsite (vrt. edellä eri tulkinnat: subjektiivinen arvio, frekvenssi)…
- ... osoittautuu, että tn:llä on selkeät **laskenta**säännöt...
- ... jotka paljastavat hyödyllisiä yhteyksiä todennäköisyyden eri aspektien välillä.
- Tällä kurssilla opettelemme niitä sääntöjä.