Johdatus todennäköisyyslaskentaan, kurssikoe 10.3.2014: malliratkaisuja

1. Merkitään tapahtumia

$$A = \text{Valittiin laatikko A}$$
$$B = \text{Valittiin laatikko B}$$
$$C = \text{Neljästä nostetusta pallosta kaksi on valkoisia}$$

(a) Umpimähkäisessä valinnassa on $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Hypergeometrisesta jakaumasta saadaan

$$P(C \mid A) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{3 \cdot 3}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$P(C \mid B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{6 \cdot 6}{70} = \frac{18}{35} \approx 0.5143$$

ja kokonaistodennäköisyyden kaavasta

$$P(C) = P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{35} = \frac{21}{70} + \frac{18}{70} = \frac{39}{70} \approx 0.5571.$$

(b) Bayesin kaavalla

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)P(C \mid A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{39}{70}} = \frac{7}{13} \approx 0.5385.$$

Arvostelu: Kumpikin kohta 6 pistettä. Murtolukuvastauksia ei vaadita, desimaaliluvut riittävät (ainakin 2 desimaalia). A-kohdassa pelkästä kokonaistodennäköisyyden kaavasta 2 pistettä, pelkästä hypergeometrisesta jakaumasta 2 pistettä.

2. Tehtävänannossa on kirjoitusvirhe: funktion eri lausekkeiden määrittelyalueet menevät päällekkäin. Toisen lausekkeen on tarkoitus olla voimassa, kun $3 < x \leq 4$ (kuten koetilaisuudessa korjattiin).

(a) Helpoimmalla tässä selvitään, kun siirrytään tarkastelemaan komplementtitapahtumaa.

$$P(2 < X \leq 5) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 \frac{1}{6}x \, dx = 1 - \Big/_{\!0}^{\,2} \frac{1}{12}x^2$$
$$= 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667.$$

Myös suora integraalilasku on mahdollinen, tällöin joudutaan integroimaan paloittain.

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 5) &= \int_2^5 f(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{6}x \, dx + \int_3^4 \frac{1}{2}(4 - x)dx + \int_4^5 0 \, dx \\ &= \Big/_{\!2}^{\,3} \frac{1}{12}x^2 + \Big/_{\!3}^{\,4} (2x - \frac{1}{4}x^2) \\ &= \frac{1}{12}(9 - 4) + (8 - 16/4) - (6 - 9/4) \\ &= \frac{5}{12} + 4 - 6 + 9/4 \\ &= \frac{2}{3} \approx 0.6667. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{6}x^2 dx + \int_3^4 \frac{1}{2}(4x - x^2)dx \\
&= \bigg/_{0}^{3} \frac{1}{18}x^3 + \bigg/_{3}^{4} (x^2 - \frac{1}{6}x^3) \\
&= \frac{27}{18} + (16 - \frac{1}{6}\cdot 64) - (9 - \frac{1}{6}\cdot 27) \\
&= \frac{7}{3} \approx 2.3333.
\end{aligned}$$

(c) Koska X on positiivinen todennäköisyydellä 1, niin

$$P(X^2 \leq 1) = P(X \leq \sqrt{1}) = P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)dx = \bigg/_{0}^{1} \frac{1}{12}x^2 = \frac{1}{12}.$$

(d) Kokeillaan, löytyykö sellaista lukua väliltä $(0, 3]$. Olkoon siis m tällä välillä, jolloin

$$P(X \leq m) = \int_0^m \frac{1}{6}x\,dx = \bigg/_{0}^{m} \frac{1}{12}x^2 = \frac{m^2}{12}.$$

Ratkaistaan, milloin tämä todennäköisyys on $\frac{1}{2}$, toisin sanoen

$$\frac{m^2}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 6 \Leftrightarrow m = \sqrt{6} \approx 2.4495.$$

Arvostelu: Kukin kohta 3 pistettä.

3. Merkitään komponenttien toiminta-aikoja satunnaismuuttujilla X_1, X_2 ja X_3 sekä koko laitteen toiminta-aikaa satunnaismuuttujalla X.

(a) Yksittäinen komponentti i lakkaa toimimasta 2 vuoden aikana todennäköisyydellä $F_{X_i}(2) = 1 - e^{-2}$, koska sen toiminta-aika on eksponenttijakautunut parametrilla 1. (Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ja tässä on $\lambda = 1$.)

Tn, että kaikki komponentit lakkaavat toimimasta (ts. koko laite lakkaa toimimasta) 2 vuoden aikana, on riippumattomuuden nojalla $(1 - e^{-2})^3 \approx 0.6465$.

Komplementtitapahtuman “laite toimii ainakin 2 vuotta” tn on $1 - (1 - e^{-2})^3 \approx 1 - 0.6465 \approx 0.3535$.

(b) Samaan tapaan kuin a-kohdassa pääteltiin: Tn, että laite lakkaa toimimasta x vuoden kuluessa alkuhetkestä, on $P(X \leq x) = (1 - e^{-x})^3$. Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan

$$P(X \leq 1 \mid X \leq 2) = \frac{P((X \leq 1) \cap (X \leq 2))}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)} = \frac{(1 - e^{-1})^3}{(1 - e^{-2})^3} \approx 0.3907.$$

Arvostelu: Kumpikin kohta 6 pistettä.

4.

(a) Kukin otoksen henkilö on toisista riippumatta puolueen 1 kannattaja tn:llä 0.2, joten $N_1 \sim \text{Bin}(5, 0.2)$. Binomijakauman pistetodennäköisyys on

$$P(N_1 = 1) = \binom{5}{1} 0.2^1 0.8^4 \approx 0.4096.$$

(b) Jos $N_1 = 1$ ja $N_2 = 2$, niin täytyy olla $N_3 = 5 - (1 + 2) = 2$. Luvuilla N_i on multinomijakauma, joten

$$P((N_1 = 1) \cap (N_2 = 2)) = \binom{5}{1, 2, 2} 0.2^1 0.4^2 0.4^2 = \frac{5!}{1!2!2!} 0.2^1 0.4^2 0.4^2 \approx 0.1536.$$

(c) Samaan tapaan kuin a-kohdassa, voidaan todeta, että $N_2 \sim \text{Bin}(5, 0.4)$. Lasketaan pistetodennäköisyys jossakin pisteessä, esim.

$$P(N_2 = 2) = \binom{5}{2} 0.4^2 0.6^3 \approx 0.3456.$$

Koska

$$P((N_1 = 1) \cap (N_2 = 2)) \neq P(N_1 = 1) P(N_2 = 2),$$

niin N_1 ja N_2 eivät ole riippumattomat.

Arvostelu: Kukin kohta 4 pistettä. Binomi- tai multinomikertoimen puuttumisesta -2 pistettä. C-kohdassa sallitaan monenlaisia perusteluja, kunhan perustelu on järkeenkäypä ja liittyy asiaan.