Johdatus todennäköisyyslaskentaan, kevät 2014
Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5 – Palautuspäivä 12.2.2014

Palauta ratkaisusi 3. kerroksen C-käytävän muovilaatikkoon. Käytä kurssitunnusta, älä opiskelijanumeroa!

Tehtäväsarja I: Riippumattomuus

1. Erään lentokoneen ohjaus perustuu hydraulijärjestelmään. Lentäjän antamat ohjauskomennot välitetään hydrauliletkun avulla ohjaussiivekkeisiin. Varmuuden vuoksi lentokoneessa on kolme rinnakkaista hydraulijärjestelmää. Lentokoneen ohjaamiseen riittää, että yksikin järjestelmistä toimii. Suunnittelija on arvioinut tilastojen perusteella, että yksittäisen lennon aikana on kullakin järjestelmällä erikseen todennäköisyys $p = 0.001$ vikaantua. Lisäksi järjestelmät ovat fyysisesti erillään toisistaan, joten suunnittelija on arvioinut, että niiden vikaantumiset ovat todennäköisyyslaskennan mielessä *riippumattomia* tapahtumia. Laske todennäköisyys, että kaikki hydraulijärjestelmät vioittuvat tietyn lennon aikana.

***2.** Jatkoa edelliseen tehtävään. Tarkempien tutkimusten perusteella on käynyt ilmi, että hydraulijärjestelmä voi vikaantua kahdella tavalla: (1) kukin järjestelmä erikseen voi vikaantua tn:llä $p = 0.001$ syistä, jotka liittyvät vain kyseiseen järjestelmään; (2) kokonaan edellisestä riippumatta voi lentokoneessa ilmetä tn:llä $q = 10^{-5}$ sellainen vika, joka aiheuttaa samalla kaikkien kolmen hydraulijärjestelmän rikkoutumisen. Määritellään

- A_i = "järjestelmä i rikkoutuu syystä (1)" $(i = 1, 2, 3)$
- B_i = "järjestelmä i rikkoutuu jostain syystä" $(i = 1, 2, 3)$
- C = "lentokoneessa ilmenee (2)-kohdassa tarkoitettu vika"
- D = "kaikki hydraulijärjestelmät rikkoutuvat syystä (1)"
- E = "kaikki hydraulijärjestelmät rikkoutuvat jostain syystä"

Laske $P(B_i)$ ja $P(E)$. Selitä tämän perusteella, ovatko tapahtumat B_1, B_2, B_3 keskenään riippumattomat. Vihje: Huomaa, että

- $B_i = A_i \cup C$
- $D = A_1 \cap A_2 \cap A_3$
- $E = D \cup C$

Näistä huomioista, ja siitä oletuksesta, että A_1, A_2, A_3, C ovat keskenään riippumattomat, pystyt laskemaan vaaditut todennäköisyydet. Kysytty riippumattomuus edellyttää erään kertolaskukaavan voimassaoloa (ks. kirja), tarkista onko se voimassa.

Jos tapahtumat B_i ovat riippuvat, onko niiden välillä positiivinen vai negatiivinen korrelaatio? Perustele.

Huom. Tehtävänantoa on selkeytetty alkuperäisestä.

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Edellä laskettu $P(E)$ on turvallisuusanalyysissä todettu niin suureksi, ettei sitä voida hyväksyä, sillä tällä konetyypillä tullaan lentämään satojatuhansia lentoja. Pohdi seuraavia vaihtoehtoja tilanteen korjaamiseksi.

(a) Lentokoneeseen lisätään neljäs samanlainen hydraulijärjestelmä, jolla todennäköisyydet ovat samat kuin edellä (ja joka myös rikkoutuu mikäli tapahtuma C sattuu).

(b) Hydraulijärjestelmien rinnalle asennetaan kokonaan toisentyyppinen ohjausjärjestelmä, joka ei ole erityisen luotettava (se toimii vain todennäköisyydellä 0.99), mutta joka on täysin riippumaton sekä hydraulijärjestelmistä että tapahtumasta C. Koneen ohjaamiseksi riittää, että mikä tahansa ohjausjärjestelmistä (joita on nyt 3+1 kpl) toimii.

Laske molemmissa vaihtoehdoissa todennäköisyys, että kaikki ohjausjärjestelmät vioittuvat.

Tehtävien 1–3 yksityiskohdat ja numeroarvot ovat keksittyjä, mutta eräs esikuva on United Airlinesin lento 232 vuonna 1989. Tapahtuma C oli yhden moottorin rikkoutuminen siten, että moottorista sinkoavat osat vioittivat useita hydrauliletkuja.

4. Erään ydinvoimalan jäähdytysjärjestelmät toimivat sähköllä. Sähkö tulee normaalisti reaktorista. Reaktorin ollessa pysäytettynä jäähdytysjärjestelmien on silti toimittava, joten ne saavat varasähköä dieselgeneraattoreista, joita on varmuuden vuoksi useita. Pohdi voidaanko generaattoreita pitää todennäköisyyslaskennan mielessä riippumattomina toisistaan. Dieselgeneraattorit tarvitsevat toimiakseen ilmaa, jonka ne saavat tietyllä korkeudella olevista ilmanottoaukoista. Pohdi mitä tapahtuu mikäli kyseisellä korkeudella on vettä koko voimalaitoksen alueella. Keksi eri tapoja miten vähentäisit tehokkaasti mutta mahdollisimman edullisesti tapahtuman "jäähdytysjärjestelmät eivät saa sähköä" todennäköisyyttä. Mitä mieltä olet suunnitelmasta "laitetaan ainakin 20 samanlaista dieselgeneraattoria, niin sitten on käytännössä mahdotonta, että kaikki vikaantuvat, koska vikaantumisten todennäköisyydet kerrotaan keskenään"? *(Vrt. Fukushiman voimala.)*

Tehtäväsarja II: Päättely epätarkasta havainnosta

5. Eräs kolikko on joko tavallinen (kruunan tn $= 1/2$) tai huijauskolikko (kruunan tn $=$ 1). Tn, että kyseessä on huijauskolikko, on 1/100. Kyseistä kolikkoa heitetään nyt kymmenen kertaa. Heittotulokset kirjaa muistiin tutkimusapulainen A, jonka kirjanpito on hiukan hataraa. Kirjanpidosta kuitenkin selviää, että kruunia tuli joko 9 tai 10. Laske havainnon perusteella (ts. ehdolla "kruunia tuli 9 tai 10") tn, että kyseessä on huijauskolikko.

Tehtäväsarja III: Diskreetit satunnaismuuttujat

***6.** Tuominen 2:18 (siis: luvun 2 tehtävä 18).

7. Painotettua kolikkoa (kruunan tn $= 0.3$) heitetään 100 kertaa. Olkoon X saatujen kruunien lukumäärä. Laske kaikki X:n pistetodennäköisyydet ($x = 0, \dots, 100$). Vastauspaperissa ei tarvitse luetella niitä. Vihje: `help binopdf`. Jos annat `binopdf`-funktion ensimmäiseksi argumentiksi vektorin `0:100`, se laskee pistetodennäköisyydet kaikille näille luvuille ja palauttaa tuloksen vektorina. Piirrä pistetodennäköisyydet (vihje: esim. komennolla `bar`).

8. Jatkoa edelliseen. Laske $P(20 \leq X \leq 40)$. Vihje: sovella `binopdf`-funktiota vektoriin `20:40` ja laske summa.

9. Noppaa heitetään toistuvasti, kunnes saadaan kuutonen. Olkoon X kuutosta edeltäneiden heittojen lukumäärä.

(a) Laske $E(X)$.

(b) Etsi X:n mediaani. (Vihje: Etsi kirjasta mediaanin määritelmä.)

(c) Etsi X:n moodi, ts. se luku x, jolla on suurin pistetodennäköisyys $P(X = x)$.

10. Noppaa heitetään toistuvasti, kunnes on saatu kymmenen kuutosta. Olkoon Y heittojen kokonaislukumäärä (sekä kuutoset että muut). Laske $E(Y)$.

Tehtäväsarja IV: Jatkuvat satunnaismuuttujat

***11.** Paikallisjunan pitäisi saapua Helsinkiin klo 12.20. Junan myöhästymisaika minuutteina on satunnaismuuttuja, joka jakautuu tasaisesti yli välin $(-3, 7)$. Laske tn, että juna saapuu

(a) ajoissa,

(b) yli 5 minuuttia myöhässä,

(c) kello 12.22 ja 12.23 välisenä aikana.

12. Henkilö odottaa raitiovaunua. Raitiovaunut kulkevat tasan 10 minuutin välein ja henkilö tulee pysäkille satunnaiseen aikaan, joten hänen odotusaikansa minuutteina on $X \sim \mathrm{Tas}(0, 10)$.

(a) Henkilö on odottanut turhaan jo 5 minuuttia, ts. hän on havainnut, että X ei ollut pienempi kuin 5. Mikä on tn, että raitiovaunu saapuu seuraavan 2 minuutin aikana? (Vihje: Ehdollinen todennäköisyys.)

(b) Kuten a-kohta, mutta henkilö on odottanut jo 7 minuuttia.

(c) Kuten a-kohta, mutta henkilö on odottanut jo 9 minuuttia.

13. Väliltä $(0, 1)$ poimitaan umpimähkään reaaliluku X. Laske todennäköisyydet tapahtumille

(a) X:n ensimmäinen desimaali $= 3$,

(b) X:n toinen desimaali $= 3$,

(c) X:n ensimmäinen ja toinen desimaali ovat kolmosia.

14. Tuominen 2:35.

15. Tuominen 2:45.

16. Tuominen 2:47.

***17.** Herra N saapuu bussipysäkille hetkellä 0. Hän arvioi, että bussin A **odotusaika** on tasajakautunut välillä $(1, 5)$ minuuttia, ja sen jälkeen bussin A **ajoaika** vaihtopysäkille on tasajakautunut välillä $(10, 15)$ minuuttia. Vaihtopysäkillä hän aikoo vaihtaa toiseen bussiin B, jonka **saapumishetki** on tasajakautunut välillä $(17, 23)$. Kaikki nämä kolme satunnaismuuttujaa oletetaan riippumattomiksi.

Herra N ehtii bussiin B eli *vaihto onnistuu*, jos bussi A saapuu vaihtopysäkille ennen bussia B.

Tutki kokeellisesti tapahtuman "vaihto onnistuu" todennäköisyyttä. Ohje: simuloi esim. 10000 kertaa herra N:n työmatka arpomalla em. kolmen satunnaismuuttujan arvot. Välin (x, y) tasajakaumasta voit arpoa yhden luvun funktiolla `unifrnd(x,y)`, tai n lukua funktiolla `unifrnd(x,y,1,n)`. Kullakin simuloidulla työmatkalla tutki, onnistuiko vaihto. Kurssisivulla annetusta laskuriesimerkistä on apua, voit ottaa sen koodin ja muokata sen tämän tehtävän mukaiseksi. **Laske** montako kertaa vaihto onnistui ja mikä oli onnistumisten suhteellinen frekvenssi (ts. osuus kaikista simuloiduista työmatkoista).

Liitä vastaukseen käyttämäsi ohjelmakoodi sekä saamasi suhteellinen frekvenssi.

Huom. Vaihdon onnistumisen todennäköisyyden **voi** *laskea tarkastikin ilman simulointia, mutta pelkästään tämän kurssin tiedoilla se on hankalaa. Kyseessä on ns. konvoluutio, josta Tuomisen kirjassa on lyhyt esimerkki. Tehtävän tarkoituksena on ymmärtää, miten mielivaltaisen tapahtuman todennäköisyyttä voidaan estimoida, jos vain tapahtumaa pystytään simuloimaan, vaikka tn:n suora laskeminen olisikin hankalaa.*

18. Jatkoa edelliseen. Tutki esim. histogrammin (`hist`) avulla, onko bussin A saapumisaika vaihtopysäkille tasajakautunut. Tutki myös vaihtomarginaalin eli saapumisaikojen erotuksen jakaumaa (ts. paljonko ennen B:tä A saapuu; marginaali voi olla negatiivinen).