Johdatus todennäköisyyslaskentaan, kevät 2014
Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3 – Palautuspäivä 29.1.2014

Palauta ratkaisusi 3. kerroksen C-käytävän muovilaatikkoon. Käytä kurssitunnusta, älä opiskelijanumeroa!

Tehtäväsarja I: Todennäköisyysavaruuden perusominaisuudet
Tutustu (jos et ole sitä jo tehnyt) Tuomisen lukuihin 1.2–1.4.

1. Olkoon $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ ja $P(A \cap B) = 0.01$. Laske $P(A \cup B)$ lauseella 1.3.4.

2. Olkoon $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ ja $P(A \cup B) = 0.61$. Laske $P(A \cap B)$ lauseella 1.3.4.

***3.** Olkoon perusjoukkona $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, ja olkoon lisäksi $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{3, 4, 5\}$. Ovatko seuraavat joukkokokoelmat σ-algebroja (ks. määritelmä 1.2.1)? Miksi / miksi eivät?

(a) $\{\varnothing, A, \Omega\}$

(b) $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$

(c) $\{\varnothing, A, B, \Omega\}$

4. Jatkoa edellisen tehtävän c-kohtaan. Keksi mahdollisimman pieni kokoelma Ω:n osajoukkoja, joka sisältää jäseninään sekä A:n että B:n, ja on lisäksi σ-algebra. (Vihje: Kokoelmassa on 16 jäsentä.)

5. Olkoon perusjoukkona $\Omega = \mathbb{R}$ eli reaalilukujen joukko, ja määritellään siellä välit $A = (-\infty, 10]$ ja $B = (-\infty, 20]$. Onko $\{\varnothing, A, B, \mathbb{R}\}$ reaalilukujen joukon σ-algebra? Jos ei, mitä muita joukkoja kokoelmaan on otettava mukaan, jotta siitä tulee σ-algebra?

6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Voidaanko äsken määritellyssä σ-algebrassa määritellä todennäköisyys P, jolle $P(A) = 0.4$ ja $P(B) = 0.2$? Jos ei, miksi ei?

7. Jatkoa edelliseen tehtävään. Keksi äsken määriteltyyn σ-algebraan *jokin* todennäköisyys, ts. funktio P joka toteuttaa määritelmän 1.2.2. Luettele nyt kaikki tapahtumat eli σ-algebran jäsenet (niitä pitäisi olla 8 kpl) ja ilmoita niiden todennäköisyydet.

Tehtäväsarja II: Kombinatoriikkaa ja otantaa
Tutustu Tuomisen lukuihin 1.5–1.6.

8. Laatikossa on 15 palloa, joista 5 on valkoisia ja 10 mustaa. Palloista valitaan umpimähkään (ilman takaisinpanoa) 3 palloa. Millä tn:llä otoksessa on (a) täsmälleen 1 valkoinen pallo, (b) ei yhtään valkoista palloa, (c) pelkästään valkoisia palloja?

9. Jatkoa edelliseen tehtävään. Onko kysyttyjen todennäköisyyksien kannalta merkitystä sillä, mitä väriä ei-valkoiset 10 palloa ovat (kunhan ne eivät ole valkoisia)? Entä, jos osa niistäkin on keskenään erivärisiä? Jos laatikossa on 5 valkoista, 8 punaista ja 7 mustaa palloa, mikä on todennäköisyys, että 3 pallon otoksessa on pelkästään valkoisia palloja?

***10.** Eräässä väestössä on $N = 1\ 000$ ihmistä, joista 500 kannattaa puoluetta A, 300 kannattaa puoluetta B ja 200 kannattaa puoluetta C. Poimitaan väestöstä umpimähkään ilman takaisinpanoa 3 henkilöä. Millä todennäköisyydellä otoksessa on pelkästään puolueen A kannattajia? Laske binomikertoimet tarkasti (murtolukuina).

11. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske sama siten, että otos muodostetaan takaisinpanolla.

12. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Olkoon väestön henkilöt numeroitu luvuin $1, \ldots, 1000$ siten, että puolueen A kannattajat ovat numerot $1, \ldots, 500$ jne. Poimi Matlabilla 3 henkilön satunnaisotos ilman takaisinpanoa (vihje: `randperm(1000,3)`) ja tutki, olivatko kaikki henkilöt puolueen A kannattajia (vihje: mikä epäyhtälö ilmaisee asian "henkilö on A:n kannattaja")?

13. Jatkoa edelliseen tehtävään. Toista sama otantakoe kymmenentuhatta kertaa ja laske, kuinka usein toteutui tapahtuma "kaikki otoksen 3 henkilöä ovat A:n kannattajia". Vihje: käytä silmukkaa `for i=1:10000` ja pidä laskurimuuttujaa, jonka arvoa kasvatat 1:llä silloin kun tapahtuma toteutuu. Laske lopuksi tapahtuman suhteellinen frekvenssi, ts. toteutuneiten tapahtumien lukumäärä jaettuna toistokertojen määrällä. Vertaa tulosta lukuun, jonka laskit tehtävässä 10.

14. Ryhmä, johon kuuluu $2n$ poikaa ja $2n$ tyttöä, jaetaan umpimähkään kahteen yhtä suureen osaan. Millä tn:llä kummassakin osassa on yhtä paljon tyttöjä ja poikia? Arvioi tätä todennäköisyyttä käyttäen Stirlingin kaavaa (kun n on suuri). Stirlingin kaavan löydät sivulta 23.

15. Laatikossa on 100 palloa, jotka on numeroitu luvuin $1, \ldots, 100$. Laatikosta nostetaan 5 palloa *takaisinpanolla.* Mikä on todennäköisyys, että suurin esiintyneistä luvuista on täsmälleen 10? Vihje: Tutki tapahtumia $A =$ "jokainen nostettu pallo on numeroltaan enintään 10" ja $B =$ "jokainen nostettu pallo on numeroltaan enintään 9". Miten tapahtumat suhtautuvat toisiinsa, ja kysyttyyn tapahtumaan?

16. Herra K pelaa lotossa rivin $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)$. Lottokone arpoo 7 numeroa joukosta $\{1, \ldots, 39\}$. Herra K:n mielestä koneen arpoma numero *osuu lähelle*, jos se poikkeaa jostain K:n pelaamasta numerosta enintään 1:llä; esim. numerot 4,5,6 osuvat lähelle, koska K pelasi numeron 5.

Muodosta lauseke tapahtuman $L_k =$ "koneen arpomista numeroista k kpl osuu lähelle" todennäköisyydelle *edellä mainitulla pelirivillä* (lausekkeessa ei tarvitse huomioida mahdollisuutta, että herra K olisi pelannut jonkin muun rivin).

Vihje: otanta ilman takaisinpanoa; nimitä lähelle osuvia numeroita punaisiksi ja muita valkoisiksi. Voit ajatella, että lottokoneessa on 39 palloa, joista tietty lukumäärä on punaisia (ne, jotka ovat lähellä K:n numeroita) ja loput valkoisia. Kone ottaa tästä pallokokoelmasta 7:n pallon otoksen ilman takaisinpanoa.

Laske $P(L_0)$, $P(L_4)$ ja $P(L_7)$.

17. Jatkoa edelliseen tehtävään. Arvo esim. Matlabilla tuhat lottoriviä ja laske, montako milläkin rivillä osui lähelle (herra K:n numeroita). Yhden lottorivin voit arpoa komennolla `randperm(39,7)`.

Vihje: Kun 7 numeron lottorivi on arvottu, yhdellä yksinkertaisella epäyhtälöllä voit tarkistaa, mitkä rivin numeroista ovat "lähellä" herra K:n numeroita (ne on varta vasten valittu niin, että tämä onnistuu näin helposti).

Vastauksessa ei tarvitse luetella arvottuja rivejä, riittää kertoa miten usein toteutuivat tapahtumat L_0, L_4 ja L_7.

Tuhannen rivin arpomiseen kannattaa käyttää `for`-silmukkaa (katso ensin käyttöohjeet `help for`).

Tehtäväsarja III: Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus
Tutustu Tuomisen lukuihin 1.7 ja 1.8.

18. Korttipakasta nostetaan kolme korttia. Merkitään A:lla tapahtumaa "ensimmäinen nostettu kortti on hertta ja B:llä tapahtumaa "toinen nostettu kortti on hertta".

(a) Jos ensimmäinen kortti on hertta, niin toisen kortin nosto tapahtuu 51 kortin pakasta, jossa on vain 12 herttaa. Mikä on siis tällöin todennäköisyys saada hertta? Toisin sanoen, mikä on $P(B \mid A)$?

(b) Järkeile samaan tapaan kuin a-kohdassa, mikä on todennäköisyys saada hertta, jos ensimmäinen kortti *ei* ollut hertta. Toisin sanoen ilmoita todennäköisyys $P(B \mid A^c)$.

(c) Laske kertolaskukaavan (lause 1.7.4 sivu 38) perusteella $P(A \cap B)$.

19. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske $P(A \cap B)$ kombinatorisesti siten, että kahden kortin järjestyt parit ovat keskenään symmetrisiä alkeistapauksia; laske suotuisien alkeistapauksien lukumäärä, ja laske sitten kysytty todennäköisyys osamääränä. (Tuloksen pitäisi olla sama kuin edellisessä tehtävässä.)

20. Jatkoa edelliseen tehtävään. Ovatko tapahtumat A ja B riippumattomat? Perustele.

***21.** Korttipakasta nostetaan yksi kortti. Tarkastele kaikkia seuraavia tapahtumia pareittain (koska tapahtumia on 4, pareja on 6) ja ilmoita kunkin parin kohdalla, ovatko tapahtumat keskenään *riippumattomat vai riippuvat*, ja lisäksi, ovatko ne *erilliset*. Tapahtumien erillisyys tarkoittaa, että ne ovat joukkoina erilliset, ts. toisensa poissulketvat (ks. sivu 17). Perustele riippumattomuus tai riippuvuus *laskemalla* todennäköisyydet (kaavalla $n(A)/n(\Omega)$) ja katsomalla, toteutuuko määritelmä 1.8.1 (Tuominen s. 38).

A = "Kortti on pata"

B = "Kortti on risti"

C = "Kortti on musta"

D = "Kortti on ässä"

Tehtäväsarja IV: Toistokoe
Tutustu Tuomisen lukuun 1.9.

22. Herra K on töissä erään olutpanimon varastolla. Työpäivän päätyttyä kaikki työntekijät joutuvat satunnaistarkastukseen, jossa tn joutua tarkastukseen on 0.04. Laske tn, että K joutuu 5 työpäivän aikana tarkastuksen jälkeen **a)** tasan yhden kerran, **b)** ainakin kerran, **c)** useammin kuin kerran. Käsittele tilannetta toistokokeena.