Johdatus todennäköisyyslaskentaan, kevät 2014
Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2 – Palautuspäivä 22.1.2014

Palauta ratkaisusi 3. kerroksen C-käytävän muovilaatikkoon. Ennen kuin teet harjoituksia, lue harjoitusten palautusohje, johon on linkki kurssisivulla.

Matlab-tehtäviä varten tutustu kurssisivulta löytyvään Matlab-pikaopastukseen.

***1.** Noppaa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että tulos on "suuri" (5 tai 6)?

Tutki sitten todennäköisyyttä **kokeellisesti**. Heitä noppaa esim. 10 kertaa. Voit simuloida nopanheittoa MATLABilla apufunktiolla `noppa`. Mikä oli "suurten" tulosten suhteellinen frekvenssi (ts. osuus kaikista tuloksista)? Miten lähellä tulos on edellä laskettua todennäköisyyttä? Mitä tapahtuu, jos heität uudestaan 10 kertaa?

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tutki kokeellisesti, miten oikeiden desimaalien määrä riippuu heittosarjan pituudesta: esim. kun heitetään 10^k kertaa, missä $k = 2, 4, 6, 8$. (Anna ensin Matlabissa komento `format long`, jotta näet enemmän desimaaleja.) Voitko arvata yleisen säännön? Arvausta ei tarvitse pystyä todistamaan (siihen palataan kurssilla myöhemmin).

3. Heitetään kolmea erilaista kolikkoa (ruskea, harmaa ja keltainen). Merkitään heittojen tuloksia kokonaisluvuilla R, H ja K siten, että 1 merkitsee kruunaa ja 0 klaavaa. **Esitä** seuraavat väitteet (tapahtumat) loogisina lausekkeina ja **laske** niiden todennäköisyydet.

(a) Ruskea ja harmaa kolikko ovat kruunia.

(b) Kaikki kolme kolikkoa ovat kruunia.

(c) Ainakin yksi kolikoista on kruuna.

4. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tutki edellisen tehtävän väitteiden a–c todennäköisyyksiä **kokeellisesti** heittämällä kutakin kolikkoa 1000 kertaa (käytä apufunktiota `kolikko`). Tallenna tulokset kolmeen eri vektoriin `R`, `H` ja `K` ja laske, monessako heittokokeessa mikäkin väitteistä toteutui.

Ilmoita vastauksessasi käyttämäsi Matlab-lausekkeet, tapahtumien toteutuneet suhteelliset frekvenssit (ts. mikä osuus kokeilukerroista oli sellaisia, että väite toteutui) ja vapaamuotoinen päätelmäsi.

5. Heitä kahta noppaa kumpaakin 1000 kertaa, ja laske jokaisella heittokerralla kahden nopan silmälukujen summa (joka on jokin kokonaisluku väliltä 2…12). Piirrä summista pylväsdiagrammi (kuvaa ei tarvitse liittää vastauspaperiin). Montako kertaa summa oli 2 ja montako kertaa summa oli 7?

Mitä mieltä olet kokeen jälkeen väitteestä "summa voi aivan yhtä hyvin olla mikä tahansa luvuista 2…12"?

6. Oletetaan, että $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.1$ ja $P(C) = 0.2$. Mitä voit sanoa luvusta $P(A \cup B \cup C)$? Entä luvusta $P(A \cap B \cap C)$?

7. Todista Boolen epäyhtälö kahdelle tapahtumalle:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

8. Todista Boolen epäyhtälö n:lle tapahtumalle:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Vihje: Käytä edellisen tehtävän tulosta ja induktiotodistusta.

9. Satunnaiskokeessa heitetään painotettua tetraedriä (nelisivuista noppaa) ja tarkkaillaan, mikä kirjaimin A, B, C, D merkityistä kärjistä osoittaa ylöspäin. Pitkissä koesarjoissa on havaittu, että eri kärkien esiintymiskertojen lukumäärien suhteet ovat

$$3 : 4 : 5 : 8.$$

Kuvaile koe todennäköisyyslaskennan termein: määrittele perusjoukko ja alkeistapauksien todennäköisyydet.

***10.** Viiden henkilön (A, B, C, D, E) joukosta valitaan erääseen tehtävään umpimähkään työpari (kahden henkilön kokoinen osajoukko). Kukin mahdollinen osajoukko on yhtä todennäköinen.

(a) Luettele alkeistapaukset eli mahdolliset kahden henkilön osajoukot. Voit tehdä tämän käsin tai Matlabissa komennolla `nchoosek('ABCDE',2)`. Montako alkeistapausta on?

(b) Esitä lauseke, jolla alkeistapausten määrä voidaan laskea ilman, että ne kaikki luetellaan.

(c) Mikä on kunkin alkeistapauksen todennäköisyys?

(d) Mikä on todennäköisyys, että henkilö A valitaan? (Vihje: Etsi suotuisat alkeistapaukset.) Entä mikä on tn, että henkilö B valitaan?

11. Ravintolan ruokalistalla on 2 keittoa, 4 alkuruokaa, 3 pääruokaa ja 3 jälkiruokaa.

(a) Kuinka monta erilaista täydellistä ateriaa (keitto, alkuruoka, pääruoka, jälkiruoka) on mahdollista valita? (Käytä tuloperiaatetta.)

(b) Jokaisella osalistalla (keitot, alkuruoat, pääruoat ja jälkiruoat) yksi vaihtoehdoista sisältää pähkinää. Juuso valitsee aterian umpimähkään kaikista vaihtoehdoista. Mikä on todennäköisyys, että hänen ateriansa *ei sisällä* pähkinää? (Laske suotuisat alkeistapahtumat ja käytä osamäärää.)

***12.** 52 kortin pakasta vedetään neljä korttia. Millä todennäköisyydellä kortit ovat **(a)** kaikki samaa numeroarvoa, **(b)** kaikki eri numeroarvoa? Voit valita alkeistapauksiksi variaatiot (neljän kortin jonot) tai kombinaatiot (neljän kortin joukot) sen mukaan, kumpi tuntuu sopivammalta. (Laske suotuisat tapaukset tuloperiaatteella ja käytä osamäärää.)

13. Korttipakasta, josta on jo nostettu patakolmonen (niin että jäljellä on 51 korttia), nostetaan kaksi korttia. Mikä on todennäköisyys saada

(a) kolmospari

(b) nelospari

(c) jokin pari?