Johdatus todennäköisyyslaskentaan, kevät 2014
Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 1 – Palautuspäivä 15.1.2014

Palauta ratkaisusi 3. kerroksen C-käytävän muovilaatikkoon. Ennen kuin teet harjoituksia, lue harjoitusten palautusohje, johon on linkki kurssisivulla.

Tähtitehtävä ei tarkoita vaikeaa tehtävää, vaan tehtävää, joka pyritään tarkastamaan ja josta saa suorituspisteen vain, jos se on ratkaistu oikein. Muiden tehtävien kohdalla on opiskelijan itsensä vastuulla tarkastaa ratkaisunsa vertaamalla sitä malliratkaisuun.

Tutustu aluksi Tuomisen kirjan lukuun 1.1.

1. Olkoon satunnaiskokeena "yhden nopan heitto", ja mahdollisten tulosten joukko on $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Keksi ainakin kolme *eri* tapahtumaa A, B ja C, joilla on kullakin todennäköisyys $\frac{1}{2}$.

2. Osoita *määritelmään 1.1.1 perustuen*, että $0 \leq P(A) \leq 1$, olipa perusjoukko Ω mikä tahansa joukko ja olipa A mikä tahansa sen osajoukko.

3. Osoita *määritelmään 1.1.1 perustuen*, että $P(A^c) = 1 - P(A)$.

4. Osoita *määritelmään 1.1.1 perustuen*, että $P(A) \leq P(B)$ aina, kun A ja B ovat sellaisia tapahtumia, että $A \subset B$. (Symboli $\subset$ tarkoittaa tässä osajoukkorelaatiota, jossa myös yhtäsuuruus on mahdollinen.) Havainnollista tulosta valitsemalla nopanheitossa jotkin tapahtumat A ja B, joilla pätee $A \subset B$, ja laskemalla niiden todennäköisyydet.

***5.**

(a) Osoita *määritelmään 1.1.1 perustuen*, että $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ kaikilla tapahtumilla A ja B.

(b) Havainnollista tulosta nopanheitossa sellaisilla A ja B, joiden leikkaus on tyhjä.

(c) Havainnollista tulosta nopanheitossa sellaisilla A ja B, joiden leikkaus on epätyhjä.

6. Tutkitaan satunnaiskoetta, jossa perusjoukkona on Suomen väestö vuoden 2012 lopussa ($n = 5426674$), ja perusjoukosta poimitaan umpimähkään yksi henkilö. Tiedetään lisäksi, että perusjoukossa on 5231163 Suomen kansalaista ja 5141203 Suomessa syntynyttä. Merkitse seuraavien tapahtumien todennäköisyydet joukko-opillisesti ja laske ne, mikäli mahdollista. Jos jotakin todennäköisyyttä ei voi laskea tarkasti, selitä miksi ei, ja ilmoita se niin tarkasti kuin mahdollista (ts. paljonko kyseinen todennäköisyys on vähintään ja paljonko enintään).

(a) Henkilö ei ole Suomen kansalainen.

(b) Henkilö ei ole Suomessa syntynyt.

(c) Henkilö ei ole Suomen kansalainen *eikä* Suomessa syntynyt.

(d) Henkilö on Suomen kansalainen *ja* Suomessa syntynyt.

(Lukujen lähde: Tilastokeskus)

Jatkuu seuraavalla sivulla

7. Kolikkoa heitetään 3 kertaa. Luettele mahdolliset heittotulosten jonot (8 kpl), kun 0 merkitsee klaavaa ja 1 kruunaa. Oletetaan, että tämän satunnaiskokeen kaikki 8 tulosta ovat yhtä todennäköiset (ts. niille on voimassa määritelmässä 1.1.1 tarkoitettu symmetrinen todennäköisyys). Mikä on todennäköisyys, että saadaan

(a) tasan 0 kruunaa

(b) tasan 1 kruuna

(c) tasan 2 kruunaa

(d) tasan 3 kruunaa

(e) enintään 2 kruunaa

(f) vähemmän kuin 2 kruunaa

(g) parillinen määrä kruunia?

8. Puinen kuutio, jonka sivutahkot on maalattu, sahataan kaikissa kolmessa suunnassa kolmeen osaan, jolloin saadaan $3^3 = 27$ pikkukuutiota. Pikkukuutiot pannaan pussiin ja sieltä nostetaan umpimähkään yksi kuutio. Mikä on todennäköisyys, että siinä on täsmälleen k maalattua tahkoa $(k = 0, 1, 2, 3)$?

9. Laske integraali

$$\int_0^5 e^{x+2} dx.$$

***10.** Olkoon A parillisten positiivisten kokonaislukujen joukko ja B kolmella jaollisten positiivisten kokonaislukujen joukko. Olkoon k eräs positiivinen kokonaisluku. Mitkä seuraavista väitteistä ovat keskenään ekvivalentit eli yhtäpitävät?

1. k on parillinen **ja** kolmella jaollinen
2. k on parillinen **tai** kolmella jaollinen
3. k on pariton
4. k on parillinen **mutta ei** kolmella jaollinen
5. $k \in A^c$
6. $k \in A \cap B$
7. $k \in A \cup B$
8. $k \in A \setminus B$

Luettele kunkin kohdissa 5–8 mainitun joukon muutama pienin alkio.

Huom! Matematiikassa "tai" tarkoitetaan ns. inklusiivisena, ts. "sataa tai tuulee" on tosi myös silloin, kun sekä sataa että tuulee.