Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kevät 2014

Luento 6 / 12

Jukka Kohonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Helsingin yliopisto

Riippuvat ja riippumattomat

Tapahtumat eli väitteet A ja B ovat todennäköisyyslaskennan mielessä

riippuvia, jos A:n totuusarvon tietäminen **auttaa** arvioimaan B:n totuusarvoa

Toisin sanoen: B:n mahdollisuudet (olla tosi tai epätosi) jakautuvat **eri** tavalla A:n ollessa tosi ja A:n ollessa epätosi

Jos tapahtumat eivät ole riippuvia, ne ovat **riippumattomia**. Tällöin toisen tietäminen **ei auta** arvioimaan toisen totuusarvoa. Matemaattisesti tämä voidaan ilmaista tulokaavana:

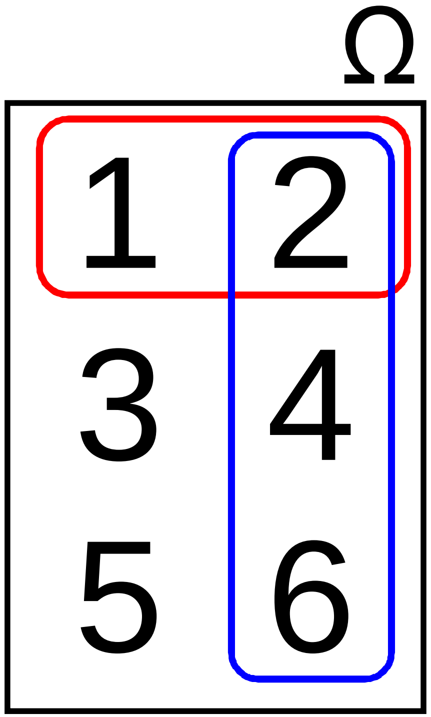
Riippumattomille tapahtumille pätee

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Tapahtuman B osuus koko perusjoukosta = P(B)
Tapahtuman B osuus A-tapauksista = $P(A \cap B) / P(A)$

Jos halutaan tietää, toteutuvatko molemmat (A ja B), voidaan katsoa erikseen kummankin tn ja kertoa keskenään.

Esim. yksi noppa

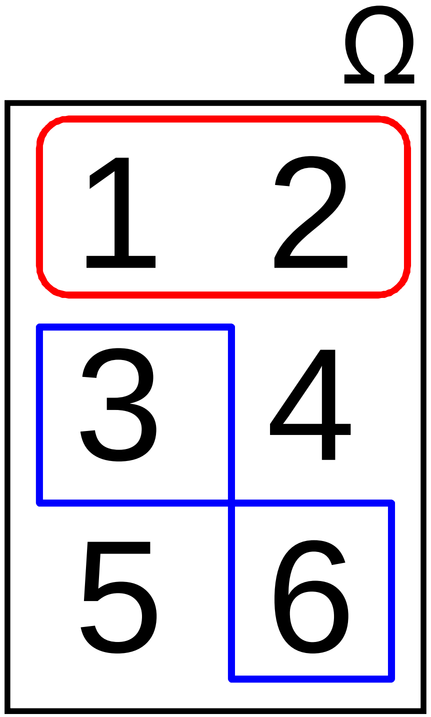


P(pieni) = 2/6 = 1/3
P(parillinen) = 3/6 = 1/2
P(pieni ja parillinen) = 1/6

Parillisia on **sama osuus** (1/2) pienistä kuin koko perusjoukosta.

Tapahtumat ”pieni” ja ”parillinen” ovat **riippumattomat**.

Esim. yksi noppa



P(pieni) = 2/6 = 1/3
P(3:lla jaollinen) = 2/6 = 1/3
P(pieni ja 3:lla jaollinen) = 0/6 = 0

3:lla jaollisia on **eri osuus** (0) pienistä kuin koko perusjoukosta (1/3).

Tapahtumat ”pieni” ja ”3:lla jaollinen” ovat **riippuvat**.

Esim. kaksi noppaa

Ω

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

P(eka noppa on 4) = 6/36 = 1/6
P(toka noppa on 6) = 6/36 = 1/6
P(eka 4 ja toka 6) = 1/36
Tapahtumat ”eka 4” ja ”toka 6” ovat **riippumattomat**.

Elmerin tennispelit

Elmeri saa palkinnon, jos hän voittaa **ainakin kaksi peräkkäistä** tennispeliä, kun hän pelaa kolme peliä vuorotellen isää (I) ja mestaria (M) vastaan.

Isää vastaan Elmeri voittaa tn:llä p.

Mestaria vastaan Elmeri voittaa tn:llä q.

Pelikerrat ovat riippumattomia.

Mestari on taitavampi kuin isä: $\boldsymbol{q < p}$.

Elmeri saa valita pelit joko järjestyksessä

1. (I, M, I) tai
2. (M, I, M).

Kumpi kannattaa valita?

Frederick Mosteller (1965): Fifty challenging problems in probability

Elmerin tennispelit

p = Elmerin tn voittaa isä

q = Elmerin tn voittaa mestari $q < p$

Merk.

1 = Elmeri voittaa pelin

0 = Elmeri häviää

Palkinnon tn =

IMI-pelissä: $pq(2-p)$

MIM-pelissä: $pq(2-q)$

Koska $(2-p) < (2-q)$,

kannattaa valita **MIM**.

Kokeile esim $p=0.9$, $q=0.01$

peli-tulokset	suotuisa?	tn sarjassa IMI	tn sarjassa MIM
000	Ei	...	...
001	Ei	...	...
010	Ei	...	...
011	**Kyllä**	$(1-p) \cdot q \cdot p$	$(1-q) \cdot p \cdot q$
100	Ei	...	...
101	Ei	...	...
110	**Kyllä**	$p \cdot q \cdot (1-p)$	$q \cdot p \cdot (1-q)$
111	**Kyllä**	$p \cdot q \cdot p$	$q \cdot p \cdot q$
Suotui-sat yht.		$pq(2-p)$	$pq(2-q)$