LIITE 2: Fourier–analyysiä

Tämän liitteen tarkoituksena on antaa suppea yhteenveto joistakin kurssilla käytettävistä Fourier–analyysin perustuloksista. Aloitetaan $\mathbb{R}^n$:n L^p–avaruuksista. Määritellään avaruudet $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ seuraavasti:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ on Lebesgue–mitallinen, } ||f||_p = (\textstyle\int |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty\}.$$

Kun samaistetaan funktiot, jotka poikkeavat toisistaan enintään nollamttaisissa joukoissa, niin lauseke $||f||_p$ määrittelee L^p:ssä normin. Kun $p = \infty$, niin määritellään

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ on Lebesgue–mitallinen, } ||f||_\infty = \text{ess.sup}|f(x)| < \infty\}.$$

Tässä merkintä ess.sup tarkoittaa *oleellista supremumia* eli supremumia nollamittaisia joukkoja lukuunottamatta. Täsmällisemmin, jos $M = \text{ess.sup}|f(x)|$, niin $|f(x)| \leq M$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa positiivimittainen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $|f(x)| > M - \varepsilon$, kun $x \in A$.

Aloitetaan määrittelemällä funktioiden *konvoluutio*. Funktioiden f ja g konvoluutio $h = f * g$ määritellään integraalina

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)dy.$$

Todistetaan seuraava konvoluutiointegraalin suppenemista koskeva tulos.

Lause L 1 *Jos $f \in L^1$ ja $g \in L^1$, niin $h = f * g$ on olemassa melkein kaikkialla ja lisäksi $h \in L^1$ ja*

$$||h||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Todistus: Todetaan, että

$$|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy,$$

joten integroimalla x:n suhteen ja Fubinin lausetta soveltamalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx \right) |g(y)|dy \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Siis h on integroituva ja siten erityisesti äärellinen melkein kaikkialla. □

Tarkastellaan seuraavaksi *Fourier–muunnosta* funktioille L^1:ssä. Jos $f \in L^1$, niin f:n Fourier–muunnos määritellään kaavalla

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x)dx.$$

Heti voidaan todeta, että Fourier–muunnos on hyvin määritelty (s.o. integraali suppenee), ja

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \|f\|_1,$$

joten $\hat{f} \in L^\infty$, ja kaava määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$.

Konvoluutiotulon ja Fourier–muunnoksen välillä vallitsee yksinkertainen yhteys. Todistetaan seuraava *konvoluutioteoreema.*

Lause L 2 *Olkoot f ja g L^1–funktioita sekä $h = f * g$. Tällöin*

$$\hat{h}(\xi) = (2\pi)^n \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Todistus: Integrointijärjestystä sopivasti vaihtaen pätee

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot x} \left(\int f(x-y)g(y)dy\right) dx \\
&= \int g(y) \left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot x} f(x-y)dx\right) dy \\
&= \int g(y)e^{-i\xi\cdot y} \left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot(x-y)} f(x-y)dx\right) dy \\
&= (2\pi)^n \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

kuten väitettiin. □

Todistetaan seuraavaksi Fourier–muunnoksen käänteiskaava. Osoittautuu, että Fourier–muunnoksen käänteismuunnos on muotoa

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)d\xi. \tag{1}$$

Ongelmana tässä integraalikaavassa on se, että L^1–funktion Fourier–muunnos ei välttämättä ole integroituva (ks. harjoitustehtävät). Siksi integraali (1) täytyykin tulkita sopivasti.

Seuraavassa esitetään Fourier–käänteiskaavan todistus L^1:n eräässä aliavaruudessa, ns. *nopeasti vähenevien testifunktioiden luokassa* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Todistuksen jälkeen käydään kursorisesti läpi muunnoksen laajennus L^1:een sekä L^2:een. Yksityiskohdat tästä sinänsä tärkeästä aiheesta sivuutetaan.

Funktioluokan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ määrittelemiseksi kiinnitetään seuraavat merkinnät. Olkoon α *multi–indeksi*, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, s.o. $\alpha_j = 0, 1, 2, ...$ Multi–indeksin pituus $|\alpha|$ määritellään summana $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Jos funktio f on riittävän monta kertaa derivoituva, niin ääritellään

$$D^\alpha f(x) = i^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x) = i^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

Samaan tapaan määritellään

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Olkoon f kaikkine derivaattoineen jatkuva funktio $\mathbb{R}^n$:ssä. Tällöin merkitään $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Määritelmän mukaan $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ on nopeasti vähenevä testifunktio, mikäli

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \le C_{\alpha,\beta} < \infty$$

kaikilla multi-indekseillä, α,β. Merkitään tällöin $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ehto sanoo siis, että funktio f kaikkine derivaattoinen vähenee äärettömyyteen mentäessä nopeammin kuin mikään polynomi kasvaa.

Nopeasti vähenevien testifunktioiden soveltuvuus Fourier–analyysiin perustuu seuraavaan kuvausominaisuuteen.

Lause L 3 *Fourier-muunnos kuvaa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:n itselleen,*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Fourier–muunnoksen rajoittuma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:ään on bijektio, ja sen käänteismuunnos saadaan kaavasta (1). Lisäksi pätee kaavat

$$\mathcal{F} D^\alpha f(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

ja

$$\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = D^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Todistus: Olkoon $\alpha = e_j = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$. Kun $t \neq 0$, niin väliarvolauseen nojalla

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(\hat{f}(\xi + te_j) - \hat{f}(\xi)) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \frac{1}{t}(e^{-i(\xi+te_j)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x}) f(x)dx \\ &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int i x_j e^{-i(\xi+\tau e_j)\cdot x} f(x)dx \end{aligned}$$

missä $\tau \in]0, t[$ (tai $\tau \in]t, 0[$, jos $t < 0$). Koska f on nopeasti vähenevä, niin dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$D^{e_j} \hat{f}(\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{i}{t}(\hat{f}(\xi + te_j) - \hat{f}(\xi)) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int x_j e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Induktiivisesti

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int x^\alpha e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx = \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi).$$

Vastaavasti osittaisintegroinnilla todetaan, että

$$\begin{aligned}\xi_j \hat{f}(\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int (i\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i\xi\cdot x}) f(x)dx \\ &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n i \int e^{-i\xi\cdot x} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx.\end{aligned}$$

ja induktiivisesti

$$\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot x} D^\alpha f(x)dx.$$

Yhdistämällä saadut tulokset seuraa arvio

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)| &= \left|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot x} D^\alpha (x^\beta f(x))dx\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int |D^\alpha (x^\beta f(x))|dx \leq C_{\alpha,\beta},\end{aligned}$$

sillä $D^\alpha(x^\beta f(x))$ on rajoitettu ja vähenee nopeasti.
Käänteiskaavan todistusta varten määritellään funktio ψ kaavalla

$$\psi(x) = (2\pi)^{n/2} e^{-|x|^2/2}.$$

Funktion Fourier–muunnos voidaan laskea eksplisiittisesti. Osoittautuu, että

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2},$$

kuten myöhemmin todistettavasta lemmasta käy ilmi. Olkoon $\varepsilon > 0$. Merkitään

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{1}{\varepsilon} x\right).$$

Muuttujanvaihdolla Fourier–muunnoksen määräävässä integraalissa nähdään, että tällöin

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = \hat{\psi}(\varepsilon \xi).$$

Tarkastellaan nyt integraalia

$$I_\varepsilon(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) d\xi.$$

Sijoittamalla $\hat{f}$:n määritelmä ja vaihtamalla integroimisjärjestystä Fubinin lauseeseen nojaten saadaan

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(x) &= \int e^{ix\cdot\xi} \left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot y} f(y)dy\right) \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int f(y) \left(\int e^{i(x-y)\cdot\xi} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)d\xi\right) dy.\end{aligned}$$

Edelleen muuttujan vaihdolla $\xi \to \varepsilon\xi$ sekä seuraavan lemman nojalla

$$\int e^{i(x-y)\cdot\xi}\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)d\xi = \frac{1}{\varepsilon^n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi/\varepsilon}e^{-|\xi|^2/2}d\xi = \psi_\varepsilon(x-y).$$

Siis

$$I_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int f(y)\psi_\varepsilon(x-y)dy = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int f(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy.$$

Sijoittamalla ψ_ε ja tekemällä muuttujanvaihto saadaan identiteetti

$$I_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \frac{1}{\varepsilon^n}\int f(x-y)e^{-|y|^2/(2\varepsilon^2)}dy = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int f(x-\varepsilon y)e^{-|y|^2/2}dy.$$

Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen nojalla voidaan ottaa raja–arvo saadun identiteetin molemmin puolin integraalimerkin alla, jolloin seuraa yhtälö

$$\begin{aligned}\int e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon(x) &= f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-|y|^2/2}dy \\ &= f(x)\hat{\psi}(0) = f(x),\end{aligned}$$

Mikä todistaa väitteen. □

Näytetään seuraavaksi edellisessä todistuksessa käytetyt väitteet ψ:n Fourier–muunnoksesta todeksi.

Lemma L 1 *Funktion* $\psi(x) = (2\pi)^{n/2}e^{-|x|^2/2}$ *Fourier–muunnos saadaan integraalista*

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{-i\xi\cdot x}e^{-|x|^2/2}d\xi = e^{-|\xi|^2/2}.$$

Vastaavasti pätee

$$\int e^{ix\cdot\xi}e^{-|\xi|^2/2}d\xi = (2\pi)^{n/2}e^{-|x|^2/2} = \psi(x).$$

Todistus: Kirjoitetaan ensin

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}e^{-t^2/2}dt.$$

Nyt osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned}h'(s) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} te^{-its}e^{-t^2/2}dt = i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}\frac{d}{dt}(e^{-t^2/2})dt \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(e^{-its})e^{-t^2/2}dt = -sh(s),\end{aligned}$$

eli

$$h(s) = h(0)e^{-s^2/2}.$$

Lasketaan funktion h arvo nollassa. Lasku tapahtuu tason napakoordinaatteihin siirtymällä,

$$\begin{aligned} h(0)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t_1^2+t_2^2)/2}dt_1\, dt_2 \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}d\theta r\, dr = -2\pi\int_0^{\infty}\frac{d}{dr}(e^{-r^2/2})dr = 2\pi, \end{aligned}$$

joten

$$h(0) = (2\pi)^{1/2}.$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}e^{-|x|^2/2}dx &= \prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_j x_j - |x_j|^2/2}dx_j \\ &= h(\xi_1)...h(\xi_n) = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}, \end{aligned}$$

kuten väitettiin. Käänteismuunnosta koskeva väite voidaan päätellä tästä integraalista, sillä funktio ψ on parillinen. $\square$

Mainitaan vielä, miten saadut Fourier–muunnosta koskevat tulokset laajenevat L^p–avaruuksiin. Lauseen L 3 todistuksesta saadaan tulkinta Fourier–käänteismuunnokselle, kun $f \in L^1$. Voidaan määritellä integroituvuutta hieman heikompi summautuvuuskäsite, ns. *Gauss–Weierstrass–summautuvuus*: Funktio g on Gauss–Weierstrass– summautuva, mikäli raja–arvo

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int g(\xi)\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)d\xi$$

on olemassa ja äärellinen. Käänteiskuvauslauseen todistuksesta nähdään, että identiteetti

$$I_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n f * \psi_\varepsilon(x)$$

pätee yleisemminkin L^1–funktioille. Osoittautuu, että tämän identiteetin oikea puoli konvergoi melkein kaikkialla kohti $f(x)$:ää. Siis vasen puoli konvergoi tällöin myös, ja saammekin tulkinnan Fourier–käänteismuunnoskaavalle: Käänteiskaava (1) on voimassa L^1–funktioille melkein kaikilla x, ja integraali on tulkittava Gauss–Weierstrass–mielessä lasketuksi.

Toinen tärkeä laajennus on Fourier–muunnoksen tulkinta L^2–funktioille. Tällöin ongelmia syntyy jopa itse Fourier–muunnoksen laskemisessa. Voidaan kuitenkin määritellä katkaistu Fourier–muunnos: Jos $f \in L^2$ ja $R > 0$, niin määritellään

$$\hat{f}_R(\xi) = \mathcal{F}_R f(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\{|x|<R\}} e^{-i\xi\cdot x}f(x)dx.$$

Tämä integraali on hyvin määritelty. Lisäksi osoittautuu, että kun R:ää kasvatetaan, niin funktioperhe $\hat{f}_R$ konvergoi L^2–mielessä: On olemassa $g \in L^2$ siten, että

$$\lim_{R\to\infty} ||\hat{f}_R - g||_2 = 0.$$

Näin ollen on luonnollista asettaa f:n Fourier–muunnoksen $\hat{f}$ määritelmäksi tämä rajafunktio, $g = \hat{f}$. Fourier–muunnos tulee näin määriteltynä olemaan jatkuva bijektio L^2:lta itselleen, ja käänteiskuvaus, joka niinikään määritellään katkaisun avulla, on myös jatkuva. Käänteiskuvauslause L^2:ssa saa muodon

$$\lim_{R\to\infty} \left\| \int_{\{|\xi|<R\}} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi - f \right\|_2 = 0.$$

Läheistä sukua Fourier–muunnokselle on periodisten funktioiden esitys Fourier–sarjoina. Todistetaan seuraavaksi Fourier–sarjaesitys. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan tapaukseen, jossa tarkasteltavat funktiot ovat välillä $[-\pi, \pi]$ määriteltyjä kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia periodisia funktioita. Kun samaistetaan väli $[-\pi, \pi]$ yksikköympyrän kehän $\mathbb{S}^1$ kanssa, niin voimme merkitä tällaisten funktioiden luokkaa lyhyesti $C^2(\mathbb{S}^1)$.

Lause L 4 *Olkoon $f \in C^2(\mathbb{S}^1)$. Tällöin f:llä on tasaisesti suppeneva sarjaesitys*

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\theta},$$

missä f:n Fourier–kertoimet saadaan integraaleina

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1} e^{-in\theta} f(\theta)d\theta.$$

Todistus: Todetaan aluksi Fourier–sarjan absoluuttinen summautuvuus. Osittaisintegroinnilla nähdään, että kun $n \neq 0$, niin

$$n^2 \int_{\mathbb{S}^1} e^{-in\theta} f(\theta)d\theta = -\int_{\mathbb{S}^1} e^{-in\theta} f''(\theta)d\theta,$$

joten

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{||f''||_\infty}{n^2},$$

ja siis sarja suppenee itseisesti.

Sarjaesityksen todistamiseksi valitaan nyt $0 < r < 1$, ja lasketaan summa

$$I_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Sijoittamalla lausekkeeseen $\hat{f}_n$:n määritelmä saadaan edelleen

$$I_r(\theta) = \int_{\mathbb{S}^1} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)} \right) f(\varphi) d\varphi = \int_{\mathbb{S}^1} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi.$$

Funktiota $P_r(\theta - \varphi)$ sanotaan *Poissonin ytimeksi*, ja sille saadaan eksplisiittinen lauseke geometristen sarjojen summana:

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{n=-\infty}^{0} r^{|n|} e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} - 1 \Big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 - re^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - re^{i\theta}} - 1 \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \end{aligned}$$

Todistetaan, että P_r:llä on ominaisuus

$$\int_{\mathbb{S}^1} P_r(\theta) d\theta = 1, \quad 0 < r < 1, \tag{2}$$

sekä

$$\lim_{r \to 1-} \int_{\mathbb{S}^1} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi = f(\theta), \tag{3}$$

kun f on jatkuva funktio. Integraaliehto (2) seuraa esimerkiksi P_r:n sarjaesityksestä sekä siitä, että funktion $e^{in\theta}$ integraali häviää kaikilla $n \neq 0$. Konvergenssituloksen (3) todistamiseksi kirjoitetaan

$$\begin{aligned} \left| \int_{S^1} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi - f(\theta) \right| &= \left| \int_{S^1} P_r(\theta - \varphi)(f(\varphi) - f(\theta)) d\varphi \right| \\ &\leq \int_{S^1} P_r(\theta - \varphi) |f(\varphi) - f(\theta)| d\varphi \end{aligned}$$

sillä P_r on positiivinen. Olkoon nyt $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja $\delta > 0$ sellainen, että $|f(\varphi) - f(\theta)| < \varepsilon$, kun $|\theta - \varphi| < \delta$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} P_r(\theta - \varphi) |f(\varphi) - f(\theta)| d\varphi &\leq \varepsilon \int_{|\theta - \varphi| < \delta} P_r(\theta - \varphi) d\varphi \\ &+ 2\|f\|_\infty \int_{|\theta - \varphi| > \delta} P_r(\theta - \varphi) d\varphi \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|\theta - \varphi| > \delta} P_r(\theta - \varphi) d\theta. \end{aligned}$$

Selvästi riittää osoittaa, että jäljelle jäänyt integraali on mielivaltaisen pieni, kun r on riittävän lähellä ykköstä. Mutta kun $|\theta - \varphi| > \delta$ ja δ on pieni, niin $\cos(\theta - \varphi) < \cos\delta$, joten

$$\begin{aligned} 1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2 &\geq 1 - 2r\cos\delta + r^2 \\ &= (\cos\delta - r)^2 + 1 - \cos^2\delta \\ &\geq 1 - \cos^2\delta, \end{aligned}$$

ja siten

$$\int_{|\theta-\varepsilon|>\delta} P_r(\theta-\varepsilon)d\varphi \le \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta} \to 0,$$

kun $r \to 1-$. Väite on siten todistettu. □

Huomautetaan jälleen, että myös Fourier–sarjoille on olemassa L^p–teoria. Klassisia summautuvuustuloksia on olemassa leegio, eikä niihin puututa tässä.

Käytännössä Fourier–muunnoksia numeerisesti laskettaessa käytetään tavallisesti ns. *diskreettiä Fourier–muunnosta (DFT)*. Olkoon $f = (f_0, f_2, \ldots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$. Tällöin vektorin f diskreetti Fourier–muunnos määritellään vektorina $F = (F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$,

$$F_k = DFT(f)_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-kn}, \quad W_N = e^{2\pi i/N}.$$

Määritellään diskreetti Fourier–käänteiskuvaus kaavalla

$$f_k = IDFT(F)_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n W_N^{kn}.$$

Osoittautuu, että

$$IDFT(DFT(f)) = f,$$

minkä asian toteaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Diskreetillä Fourier–muunnoksella voidaan laskea helposti periodisen funktion Fourier–kertomien approksimaatioita. Oletetaan, että periodista funktiota f voidaan approksimoida katkaistulla Fourier–sarjalla, s.o.

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\theta} \approx \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_n e^{in\theta},$$

missä N oletetaan parilliseksi. Kirjoittamalla $f_n = f(\theta_n)$, missä $\theta_n = 2\pi n/N$, $0 \le n \le N-1$, nähdään, että nyt

$$f_k \approx \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_n e^{2\pi ink/N} = \sum_{n=0}^{N/2} \hat{f}_n e^{2\pi ink/N} + \sum_{n=-N/2+1}^{-1} \hat{f}_n e^{2\pi ink/N}.$$

Kirjoittamalla jälkimmäisessä summassa $n = \ell - N$, $\ell = N/2+1, \ldots, N-1$ sekä toteamalla, että

$$e^{2\pi ink/N} = e^{2\pi i(\ell-N)k/N} = e^{2\pi i\ell k/N},$$

nähdään, että summa on muotoa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N/2} \hat{f}_n e^{2\pi ink/N} \quad &+ \quad \sum_{\ell=N/2+1}^{N-1} \hat{f}_{\ell-N} e^{2\pi i\ell k/N} \\ &= \quad N\,[IDFT((\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_{N/2}, \hat{f}_{-N/2+1}, \ldots, \hat{f}_{-1})^T)], \end{aligned}$$

eli

$$DFT(f) = \frac{1}{N}(\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_{N/2}, \hat{f}_{-N/2+1}, \ldots, \hat{f}_{-1})^T. \tag{4}$$

Edellä esitetystä tuloksesta nähdään, että jos funktion spektri (s.o. sen nollasta poikkeavien Fourier–kertoimien indeksijoukko) on välillä $]-N/2, N/2]$, niin spektrin laskemiseksi tarvitaan funktion arvot $2\pi/N$:n välein. Tällöin sanotaan, että näytteenottotaajuus on N, kaksinkertainen spektrin ylärajaan verrattuna. Termi "näytteenottotaajuus"merkitsee siis sitä, kuinka monta näytettä funktiosta on otettava kutakin 2π:n mittaista väliä kohden. Tätä periaatetta sanotaan *Nyquistin näytteenottoteoreemaksi.*

Edellä esitetyssä laskussa funktioita approksimoitiin katkaistulla Fourier–sarjalla. Ei–periodisille funktioille Nyquistin näytteenottoteoreema seuraavassa muodossa: Oletetaan että f on $\mathbb{R}$:ssä määritelty funktio. Oletetaan edelleen, että f:n spektri eli f:n Fourier–muunnoksen *kantaja*, $\mathrm{supp}\hat{f}$ (= pienin suljettu joukko, jonka ulkopuolella $\hat{f}(\xi) = 0$) sijaitsee suljetulla välillä $[-M, M]$. Kysytään, millä taajuudella f:stä tulee ottaa näytteitä, jotta f olisi tarkkaan tunnettu. Vastaus on "taajuudella $2M$", kuten seuraava lause osoittaa. Lause tunnetaan nimellä *Whittaker–Shannonin näytteenottoteoreema.*

Lause L 5 *Jos f:n spektri on välillä $[-M, M]$ ja $\hat{f}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, niin f:llä on esitys*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) P(x - x_n), \quad x_n = \frac{\pi}{M} n,$$

ja P on funktio

$$P(x) = \frac{1}{Mx} \sin Mx.$$

Todistus: Merkitään

$$\hat{f}_M(\theta) = \hat{f}\left(\frac{M}{\pi}\theta\right), \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

ja olkoon $P\hat{f}_M$ funktion $\hat{f}_M$ 2π–periodinen jatko,

$$P\hat{f}_M(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_M(\theta - 2\pi n).$$

Esitetään $P\hat{f}_M$ Fourier–sarjana,

$$P\hat{f}_M(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

missä kertoimet a_n saadaan integraalista

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\hat{f}_M(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\hat{f}\left(\frac{M}{\pi}\theta\right)d\theta,$$

ja siis muuttujanvaihdolla

$$a_n = \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} e^{-in\pi\xi/M}\hat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{2M}f\left(-\frac{\pi}{M}n\right).$$

Olkoon χ_M välin $[-M, M]$ karakteristinen funktio, s.o. $\chi(\xi) = 1$ jos $-M \leq \xi \leq M$ ja $\chi(\xi) = 0$ muulloin. Nyt

$$\hat{f}(\xi) = \chi(\xi)P\hat{f}_M\left(\frac{\pi}{M}\xi\right) = \frac{1}{2M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{\pi}{M}n\right)\chi(\xi)e^{in\pi\xi/M}$$

$$= \frac{1}{2M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{M}n\right)\chi(\xi)e^{-in\pi\xi/M},$$

joten f itse saadaan soveltamalla Fourier–käänteismuunnosta. Saadaan

$$f(x) = \frac{1}{2M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{M}n\right)\mathcal{F}^{-1}\chi\left(x - \frac{\pi}{M}n\right),$$

Mistä käyttämällä tietoa

$$\mathcal{F}^{-1}(\chi)(x) = \frac{1}{\pi x}\sin(Mx)$$

väite seuraa. $\square$

Esimerkki Tarkastellaan funktiota

$$e_N(\theta) = e^{iN\theta}, \quad ,N = 16.$$

Lasketaan e_N:n Fourier–kertoimet käyttäen vaihtelevia näytteenottotaajuuksia. Olkoon $L \in \mathbb{N}$, ja oletetaan merkinnällisistä syistä, että L on parillinen. Kirjoitetaan approksimatiivinen lauseke e_L:n k:nnelle Fourier–kertoimelle,

$$(\widehat{e_N})_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}e_N(\theta)d\theta \approx \frac{1}{L}\sum_{\ell=0}^{L-1} e^{-ik(2\pi\ell/L)}e_N\left(\frac{2\pi}{L}\ell\right)$$

$$= \frac{1}{L}(DFT)_L(e_N^{(L)})_k,$$

missä $(DFT)_L$ tarkoittaa kantaluvulla L laskettua diskreettiä Fourier–muunnosta ja $e_N^{(L)}$ on L–vektori

$$e_N^{(L)} = (e_N(\theta_0), \ldots, e_N(\theta_{L-1}))^T \in \mathbb{R}^L, \quad \theta_\ell = \frac{2\pi}{L}\ell.$$

Eksplisiittisesti

$$(\widehat{e_N})_k = \frac{1}{L}\sum_{\ell=0}^{L-1} e^{i2\pi(N-k)\ell/L}, \quad 0 \le k \le L-1.$$

Tästä muodosta nähdään, että k.o. summa häviää muulloin paitsi jos

$$k = N + jL, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

jolloin summa saa arvon yksi. Ehto (5) voidaan ilmaista sanomalla, että k on N:n ekvivalenssiluokan N_L edustaja tekijäryhmässä $\mathbb{Z}_L$.

Lasketaan näytteeksi kyseiset kertoimet L:n arvoilla $L = 2, 4, \ldots, 48$. Kuvaan 1 ylempään osaan on merkitty ainoan nollasta poikkeavan spektripisteen arvo k näillä eri L:n arvoilla. Kaavan (4) mukaisesti indeksi k on siirretty väliltä $0 \le k \le L-1$ välille $-L/2+1 \le k \le L/2$. Kuvasta nähdään, että DFT_L antaa väärän paikan funktion e_N spektrille kaikilla Nyquistin taajuutta pienemmillä arvoilla, kunnes riittävä näytteenottotaajuus saavutetaan ja arvo stabiloituu aikean arvon $k = 16 = N$ kohdalle. Näytteenottoteoreeman merkitysstä valaisee muös Kuvan 1 alempi kuva. Siinä on piirretty funktion e_N reaaliosa, $\cos(N\theta)$, sekä siitä liian matalalla näytteenottotaajuudella laskettu otos. Kuva selittää konkreettisesti, miksi spektri DFT_{18}:lla laskettuna oli väärä.

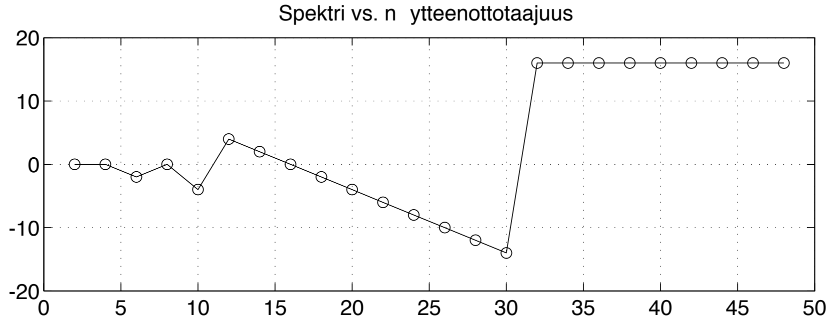
Yleisemmin edellä kuvattua ilmiötä kutsutaan *spektrin laskostumiseksi (engl.) aliasing*. Kuvassa 2 on skemaattisesti esitetty, mitä liian matala näytteenottotaajuus merkitsee Fourier–puolella. Näytteenottotaajuuden yläpuolella olevat pisteet summautuvat spektrin alapäähän ja alapuolella olevat pisteet yläpäähän.

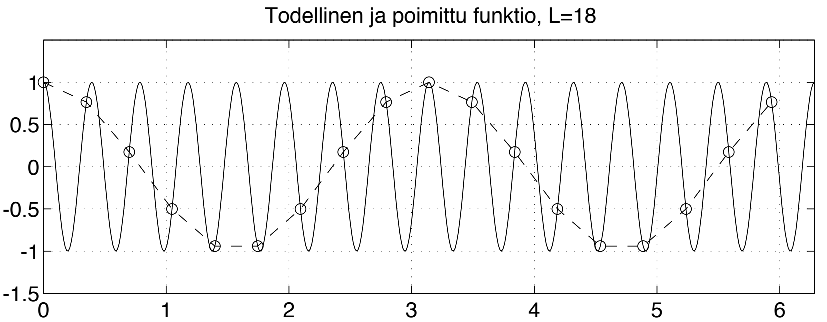
Harjoitustehtäviä:

1. Todista, että diskreetti Fourier–käänteismuunnos IDFT on diskreetin Fourier–muunnoksen DFT käänteismuunnos.

2. Laske funktion
$$f(\theta) = \frac{1}{2 + \cos\theta}$$
Fourier–kertoimet.

3. Laske välin $[-1, 1]$ karakteristisen funktion χ Fourier–muunnos. Osoita, että $\hat{\chi} \notin L^1$.





Kuva 1. Eri näytteenottotaajuuksilla laskettu spektrin paikka funktiolle e_N (ylempi kuva). Todellinen funktio ja siitä liian alhaisella näytteenottotaajuudella saatu näyte (alempi kuva).

4. Laske integraali

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi.$$

(Vihje: konvoluutioteoreema L 2.)

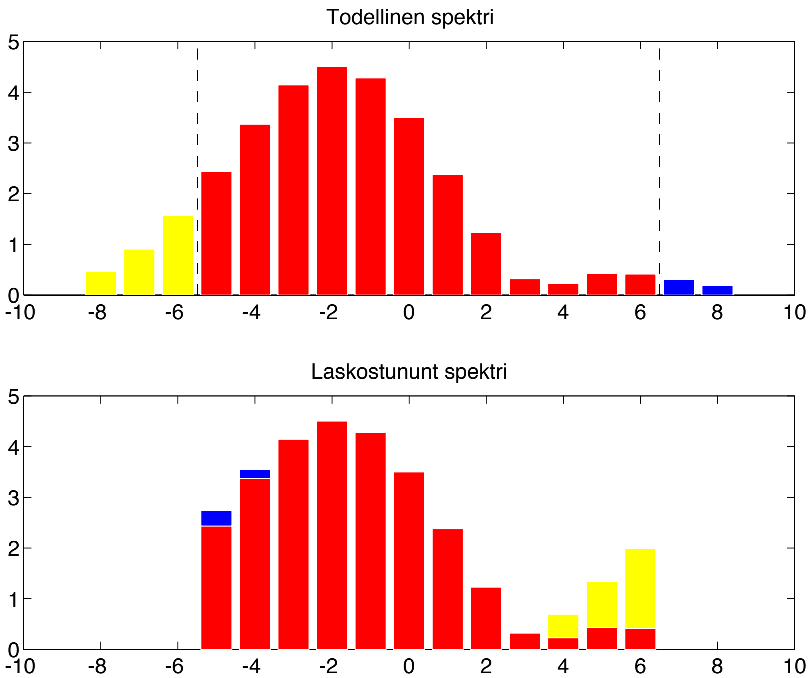
5. Tarkastellaan lämpöyhtälöä

$$\Delta u(x,t) = \partial_t u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$$

alkuarvolla

$$u(x,0) = u_0(x) = e^{-|x|^2/2}.$$

Ratkaise u. (Opastus: Fourier–muunnos x:n suhteen)



Kuva 2. Kaavakuva spektrin laskostumisilmiöstä. Ylempi kuva on todellinen spektri, alemmassa kuvassa on näytteenottotaajuudella $2L = 12$ laskien saatu spektri, joka laskostuu päistään.