

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Geometria, kevät 2014

Harjoitus 5

17.2.2014 alkavalle viikolle

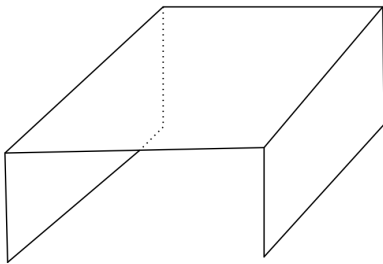
Tehtävissä 1-3 syvennyttään jälleen Lehtisen materiaaliin ja tällä kertaa ympyröihin ja jännelikulmioihin liittyviin tuloksiin. Tehtävissä 4-7 pohditaan koulun geometriaa esitelmäaiheisiin liittyen. Lopussa on ”tähtitehtävä”, jota voi käsitellä harjoitusryhmissä ajan salliessa. (Tähtitehtävä ei ole ”pakollinen” eli kun mietitään tehtyjen laskaritehtävien määrää, prosentuaalisessa suuudessa se vaikuttaa osoittajaan, mutta ei nimittäjään.)

1. Osoita, että jos suorat a ja b leikkaavat toisensa pisteessä C ja sivuavat ympyrää Γ pisteissä A ja B , niin $CA \cong CB$. (Monisteen harjoitus 1.6.4)

2. Osoita, että jos $ABCD$ on jännelikulmio (eli sellainen nelikulmio, jonka kärjet ovat jonkin ympyrän kehällä), niin kulmat $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ ovat vieruskulmia. (Monisteen harjoitus 1.6.10.)

3. Osoita, että tehtävän 2 väite pätee myös kääntäen: jos nelikulmiossa $ABCD$ kulmat $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ ovat vieruskulmia, niin $ABCD$ on jännelikulmio. (Monisteen harjoitus 1.6.11.)

4. a) Paperiarkin koko on 30 cm x 40 cm. Paperiarkki halutaan taittaa kehikoksi kuvan mukaisesti niin, että kehikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri. Miten päin ja mistä kohdasta arkki kannattaa taittaa?



b) Keksi peruskouluun sopiva tehtävä pinta-alafunktioista (tai tilavuusfunktioista).

5. Palauta mieleen, mitä muistat lukion perusteella trigonometrisista funktioista ja ratkaise yhtälöt

a) $\sin 2x = \sin x$

b) $\sin 2x = -\sin x$

c) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$. (Tässä on hyötyä apumuuttujista r ja t ja sijoituksista $1 = r \sin t$ ja $\sqrt{3} = r \cos t$.)

6. Laskeva suora kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta siten, että sen ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion ala on mahdollisimman pieni. Määritä suoran kulmakerroin ja vastaava pienin ala. (yo, S2005)

7. a) Suoran ympyräpohjaisen kartion sisään asetetaan tilavuudeltaan suurin mahdollinen suora ympyräpohjainen lieriö, jonka akseli on kartion akselilla, pohjista toinen on kartion pohjalla ja toisen kehä koskettaa kartion vaippaa. Kartion korkeus on 6 pituusyksikköä ja pohjan säde on r . Määritä lieriön korkeus. (yo, K2007)

b) Jälleen kerran: kolmiulotteisuus on usein hankala hahmottaa. Minkälaisia kuvia tilanteesta voi piirtää? Miten muuten tehtävää voi havainnollistaa?

* Tehtävä 5 vuoden 1894 ylioppilaskokeesta: *Pisteestä A , joka on ulkopuolisemmalla kahdesta konsentrisestä ympyränkehästä, piirretään kaksi suoraa viivaa siten, että ne sivuavat sisäpuolista ympyränkehää pisteissä B ja C , sekä leikkaavat ulkopuolisen ympyrän kehän pisteissä D ja E . Todista, että etäisyys BC on puolet etäisyydestä DE .* (Huom. tässä tehtävässä tarvitaan yhdenmuotoisuutta; saat olettaa yhtenevyytlauseiden lisäksi yhdenmuotoisuuslauseet tunnetuksi.)